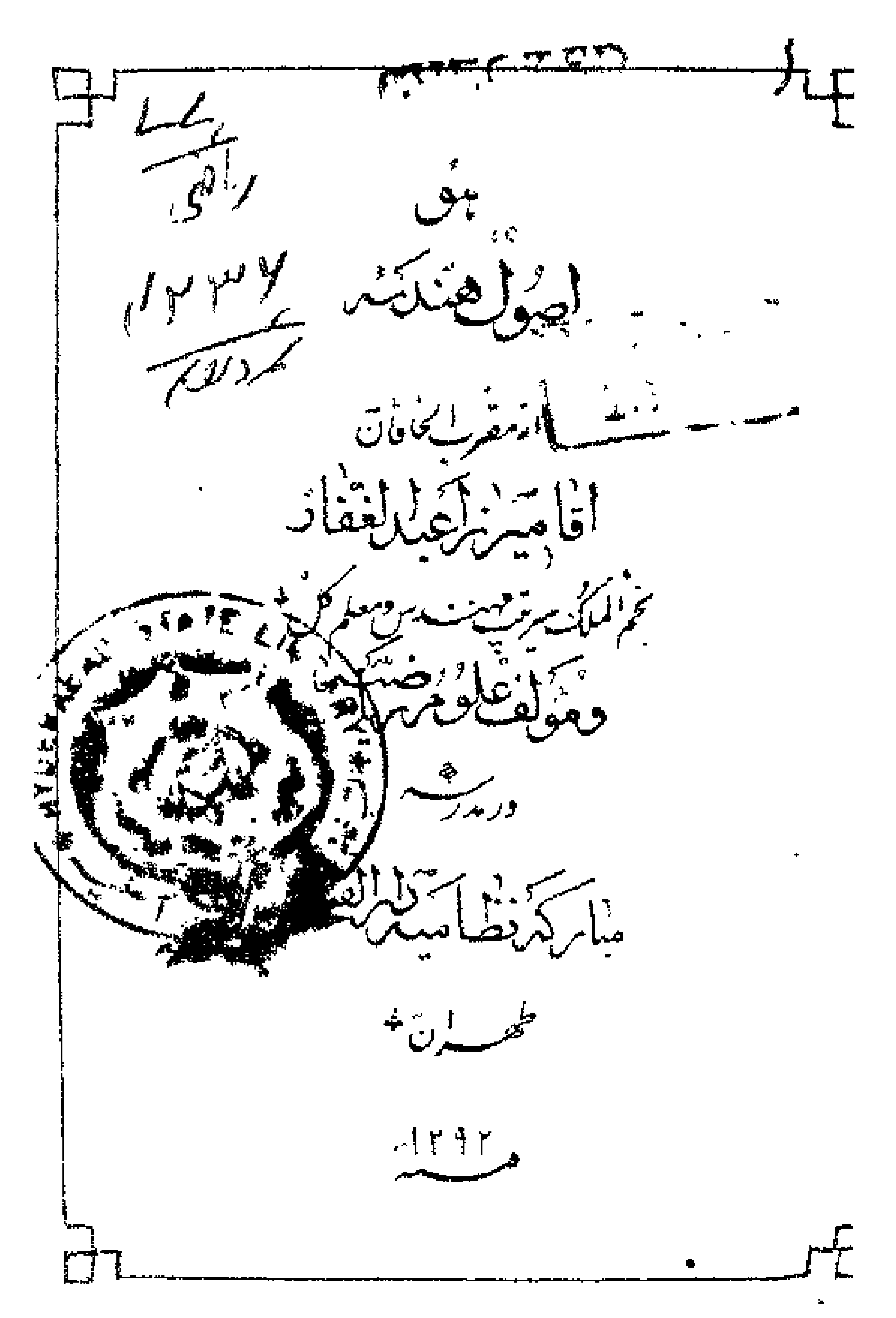


هو

اصول هندسه

انشاء مقرب الخاقان

آقا میرزا عبدالغفار

نجم الملک سرتیپ مهندس و معلم کل

و مؤلف علوم ریاضی

در مدرسه

مبارکه نظامیه دارالفنون

طهران

۱۲۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین والصلوة والسلام علی محمد وآله اجمعین
وبعد پوشیده نیست که از آنگاه که تاج وتخت خسروی بفرق فرقدسای
وقدم عالم آرای مالک الملوک وسلطان السلاطین خدیو خدیوان کامکار
اعلیحضرت اقدس شهریار جمشید زمان سایه یزدان السلطان بن السلطان
والخاقان بن الخاقان ناصر الدین شاه قاجار خلد الله ملکه ودولته
مباهی ومزین گردیده دولت را نظامی تازه ومملکت را نشاطی بی اندازه حاصل
بقسمیکه همه چیز را تفاوت وتوفیر معلوم است خاصه علوم را که در عهد رسوم
دارسه ودر شمار آثار طامسه بود وچون همت این خسرو اعلی همت از اول دولت
روز افزون احیا وتجدید این مراسم وافشا وتشیید این معالم بوده وهست
چنانچه تفویض منصب جلیل نبیل وزارت علیه بشخص اکمل وفرد اوحد نواب مستطاب
اشرف امجد والا اعتضاد السلطنه علیقلی میرزا ادام الله مجده وبنای مدرسه
مبارکه دار الفنون وکثرت معلمین مجد ومتعلمین مستعد وبذل مبالغ خطیره همه ساله
در این راه هر یک شاهدیست بی اشتباه شاهدی عدل گواهی بینست منتی چه صنعتی

تو خود بیاموزند و چون بمقتضای اراده علیه همایونی و مساعی جمیله وزیر علوم و تجارت
و فواید مقرب الخاقان جعفرقلیخان سرتیپ رئیس و مواظبت تامه مقرب الخاقان محمدحسین خان
سرتیپ ناظم این دولت جمیع فنون خاصه ریاضی زاید الوصف و ابراست و در
سایر فنون و صنایع بر مقدمات آنست خاصه بر علم حساب و هندسه
لهذا حقیر جانی ابن الفاضل الکامل علی محمد عبدالغفار اصفهانی محض ادای
شکر نعمت و استرضای خاطر ملکوتی مظاهر خسروانه و تقدیم خدمت در حضرت
وزارت علیه و انتفاع عموم متعلمین مدرسه مبارکه دارالفنون و غیرهم کتبی
در اصول فنون ریاضی باندازه فکر قاصر تالیف و ترجمه نموده در اصول حساب ۱۲۸۱
ذکر نموده سبب تالیف آن کتب را از جمله آن علوم هندسه اولی است و معروفترین
کتابی که در این علم میانه ما بوده هندسه اقلیدس است که در زمان مامون بن الرشید
از لغت یونانی بعربی ترجمه شد و بعد سلطان المحققین خواجه نصیر علیه الرحمه
آنرا تحریر فرموده اسلوب آن کتاب بعد از وضع قانون جدید در تحصیل پسندیده
نیست چونکه در اصل کتاب اقلیدس اصول و فروع مخلوط اند و بعد از آن خواجه
علیه الرحمه در تحریر آن برای هر شکل وجه اخری ذکر فرموده اند و بلکه در اکثر اشکال
وجوه عدیده و جهت اختلاف وقوع بسیار بیان نموده اند مانند شکل عروس که ۴۹
وجه در آن ذکر شده و چنین کتابی برای تحصیل مبتدی مناسب نیست و مقصود حقیر نه
توهین آن کتاب است ابدا بلکه اشاره بعدم مناسبت او است برای مبتدی
ولی مطالعه آن برای تتبع و تصرف در براهین و وسعت خیال بسیار خوب است
بالجمله دو کتاب هم در مدرسه مبارکه ترجمه شده یکی از آنها اگرچه خوش اسلوب است
ولی ناقص میباشد و حروف اشکالش فرنگی و کتاب دیگر مباحثش بسیار حقیر برای
مدرسه مبارکه دارالفنون دو کتاب در اصول هندسه نوشت یکی تالیفی است مبسوط

اصول و فروعش از هم ممتاز و ضمیمه دارد و مشتمل بر مسائل مفیده و رسمیه بسیار
که در موارد خود کافی بکار آیند و دیگر همین کتاب موجود است که اصولی دارد و نسبت به
چونکه اصول جمیع مطالب هندسه را علی الطریق اختصار و بعبارتی مانوس در آن درج
شده و نظر باین نکته برای مبتدی مناسب تر است و این اصولی است که تألیف
چندین تغییر و تصرف در آن شده تا باینجا رسیده و بالفعل برای تحصیل انتظام نزد عموم
مهندسین مختار افتاده و مشتمل است بر هشت مقاله

اول در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرده

دوم در خواص دایره و مقیاس زوایا

سیم در خواص اشکال کثیرة الاضلاع و مساحت و تشابه آنها

چهارم در خواص اشکال کثیرة الاضلاع منتظمه و مساحت دایره

پنجم در خواص اشکال فضائیه یعنی خطوط و سطوحیکه در سطحی مستوی نگنجند

ششم در خواص اجسام کثیرة السطوح

هفتم در خواص کره و متعلقاتش

هشتم در مساحت اجسام مستدیره ثلثه یعنی کره و استوانه و مخروط

عدد اصول احکامیکه در این کتاب مبرهن شده ۴۸۳ است و عدد نتایج
و شروح و تنبیهاتی که در حقیقت احکام فرعیه اند قریب به ۱۰۰ و عدد احکام تمرین
منوطی که بی دلیل ذکر شده ۲۰۴ و عدد مسائل حل کردنی که جوابهاشان
بیان شده ۶۵ و تمرینها ۵۰۴ عدد می باشد پس بر متعلمینی که بخواهند مهندس
شوند اقلاً لازم است که تصور جمیع این احکام اصلیه و فرعیه را بخواطر بسپارند اگرچه خواهند
علاوه بر آنها براهین را حفظ کنند

بقیه
تمام اشکال این کتاب از خود
تحریر شده و مطالب
زاده و مرتبه ترتیب تمام
را نموده و هر دو قسم
[illegible] از مهندسین
متعلق خود و [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
واقع شده باشد

و ترتیب این علم در علوم تحصیلیه بعد از اصول حساب است یا بعد از اصول جبر و مقابله

مقالهٔ اولی

در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرده

حدود

۱ مکان مستقر فی محدود جسم را در فضاء نامحدود این عالم **حجم** گوئیم

۲ حدی که مفروز میکند جسم را از فضای محیطش **سطح** گوئیم

۳ محل تلاقی دو سطح جسم را **خط** گوئیم

۴ محل تلاقی دو خط را **نقطه** گوئیم

۵ بنا بر این تعریفات حجم و سطح و خط بی تصور جسم وجود خارجی پیدا نکنند ولی در هندسه آنها را قائم بالذات فرض میکنیم و غیر متعلق با جسامیکه منسوب بودند با

۶ حجم و سطح و خط را عموماً **شکل** گوئیم

۷ فایده علم هندسه مساحت وسعت اشکال است و معرفت خواص آنها

۸ خط مستقیم خطی است غیر محدود که چون دو نقطه بر آن فرض کنیم قطعه واقعه مابین آن دو نقطه از آن خط اقصر فاصله باشد مابین آن دو و بعبارت اخری خطی است که وضعش مابین آن دو نقطه ثابت و تغیر ناپذیر باشد و هر جا خط مطلق گوئیم مقصود مستقیم است و از واضحات است که اگر دو خط در جزئی از طول خود بر هم منطبق باشند در تمامی طول البته منطبق میشوند

۹ خط منکسر و شبیه کثیر الاضلاع خطی است مرکب از اجزای مستقیمه

۱۰ خط منحنی آنست که نه مستقیم باشد نه مرکب از اجزای مستقیمه

۱۱ سطح مستوی آنست که چون دو نقطه غیر مشخص بر او فرض شود

یا مثل آن دو سطح مستقیم وصل شود تمام این خط بر آن سطح واقع شود و ما هر جا سطح مطلق گوئیم مقصود مستوی است

۱۲ سطح منحنی آنست که نه مستوی باشد نه مرکب از اجزای مستویه

۱۳ وضع و کیفیتی که از تقاطع دو خط مستقیم اب و اج حادث شود زاویه گوئیم و نقطهٔ ا راس زاویه است و دو خط اب و اج ضلعینش

زاویه را گاه بحرف راس ا نمائیم و گاه بسه حرف باج یا جاب بنا بر آنکه حرف راس در وسط افتد

دو زاویه ا و ه را متساوی گوئیم هرگاه بتوان آنها را درست بر هم منطبق ساخت فرض بکنیم زاویه ه بر ا نقل شود بر وجهی که هد بر اب واقع شود آنوقت اگر هر بر اج منطبق گشت دو زاویه را متساوی گوئیم

زاویه ا را گوئیم مضاعف و ثلاثه امثال ... زاویه ه است هرگاه دو مثل این زاویه یا سه مثل یا غیره در آن بگنجد

و از این قرار زوایا مثل سایر مقادیر مقیاس پذیرند و میتوان آنها را بهم یکی سنجید

۱۴ هرگاه خط اب خط جد را بر وجهی تلاقی کند که دو زاویه مجاوره باج و باد متساوی شوند خط اب را

نسبت به ح د عمود گوییم و آن دو زاویه را قائمه

و عن قریب مبرهن شود که از نقطهٔ مفروضه ا از خط ح د میتوان عمودی

آن خط اخراج نمود و اینکه جمیع زوایای قائمه متساوی خواهند بود

هر زاویه که از قائمه بزرگتر باشد منفرجه اش گوییم و اگر کوچکتر باشد حاده

دو زاویه را متمم و تمام همدیگر گوییم هرگاه مجموعشان یک قائمه باشد

و مکمل و کمال همدیگر گوییم هرگاه مجموعشان دو قائمه باشد

۱۵ دو خط واقع در سطحی را متوازی گوییم

ا ـــــــــ ب

هرگاه از هیچ جهت متلاقی نشوند هرچند بینهایت امتداد

ج ـــــــــ د

داده شوند در جهتین مثل دو خط ا ب و ج د

۱۶ شکل مسطح سطحی است که از جوانب بخطوط منتهی گردد

پس اگر خطوط مستقیم باشند وسعت محدوده را شکل مستقیم الاضلاع و کثیر الاضلاع گوییم

و مجموع خطوط را محیط آن شکل

۱۷ ساده ترین اشکال کثیر الاضلاع آنست که صاحب سه ضلع باشد و آن را

مثلث گوییم

و اگر دارای چهار ضلع باشد ذو اربعة اضلاع و پنج ضلعی را ذو خمسة اضلاع گویند

۱۸ مثلث را متساوی الاضلاع گوییم هرگاه هر سه ضلعش متساوی

باشد و متساوی الساقین هرگاه دو ضلعش متساوی باشند و مختلفة

الاضلاع

اگر هیچ کدام

برابر نباشند

مختلف الاضلاع

متساوی الساقین

متساوی الاضلاع

۱۹ مثلث قائم الزاویه آنست که یک زاویه‌اش قائمه باشد و ضلع
مقابل آن زاویه را وتر مطلق گوئیم مثل مثلث ا ب ج و زاویه ا و وتر ب ج

۲۰ در جمله اشکال ذوات اربعه اضلاع مربع است و آن
شکلی است که جمیع اضلاعش متساوی باشند و جمیع زوایایش قائمه
و دیگر مربع مستطیل یا مسطح و آن زوایایش قائمه
و اضلاع متقابله متساوی
و دیگر متوازی الاضلاع یا شبه معین
و آن اضلاع متقابله‌اش متوازی باشند
و دیگر معین و آن اضلاعش متساوی باشد ولی
زوایایش قائمه نباشند
و دیگری ذو ذنقه است
و آن دو ضلعش تنها متوازی است

۲۱ در هر شکل قطر خطی است وصل مابین دو زاویه غیر مجاوره مثل ا ج

۲۲ ذو کثیر الاضلاع متساویة الاضلاع آنست که اضلاعش متساوی باشند
و متساوی الزوایا آنست که زوایایش متساوی باشند

۲۳ دو ذو کثیر الاضلاع را متساویة الاضلاع گوئیم نسبت به یکدیگر
هرگاه اضلاعشان نظیر به نظیر متساوی باشند یعنی مرتب باشند بیک ترتیب
بر وجهی که ضلع اول یکی متساوی باشد بضلع اول دیگر و ضلع دویم بدویم و هکذا
و از این وجه معنی دو ذو کثیر الاضلاع متساویة الزوایا نیز معلوم است
و در اینصورت هر دو ضلع متساوی یا دو زاویه متساویه را متقابله و متناظره گوئیم

۲۴ . کثیر الاضلاع محدب آنست که هر ضلعش را امتداد دهیم تمام شکل در یک طرفش فتد

و محیط چنین کثیر الاضلاع را خط مستقیم بیش از دو نقطه
قطع نکند و اگر در مثل شکل ا ب ج د ه خط م ع
محیطش را بر چهار نقطه م و ن و ل و ع قطع کند
سببش اینست که مثلاً ضلع ب ج که در ما بین ر
نقطتین قطع شده در یکطرف شکل نیفتاده یعنی آن شکل محدب نیست

تنبیه چهار مقاله اول این کتاب در اشکال مسطحات یعنی اشکالیکه خطوطشان
از یک سطح مستوی خارج نباشد

در شرح اصطلاحات و علامات

علوم متعارفه حکمی است که فی نفسه واضح باشد و احتیاج باقامه دلیل نداشته باشد

قضیه حکمی است محقق که واضح نشود جز بعد از اقامه دلیل و برهان

مسئله مطلبی است وارد که اقتضا کند راه جوابی را

اصول موضوعه حکمی است محقق برای برهان قضیه یا در حل مسئله آنرا استعمال کنیم

ایراد لفظی است مشترک که تعلق گیرد هم بقضیه و هم بمسئله و هم باصول موضوعه

نتیجه حکمی است مستنبط از یک ایراد یا بیشتر

شرح تنبیهی است در خصوص یک ایراد سابق الذکر یا بیشتر که از آن روی معلوم شود
رابطه و فایده و حصر و عمومیت آنها

فرض قرارداد است در بیان ایراد یا در اقامه برهان

اینصورت = علامت مساوات است مثلاً ج = د یعنی ج مساویست

اینصورت (علامت کوچکتریست مثلاً اگر بخواهیم بنمائیم که ج کوچکتر است
از د چنین مینویسیم ج (د
اینصورت) علامت بزرگتریست مثلاً ج) د یعنی ج بزرگتر است از د
علامت جمع اینست + و آنرا بعلاوه تلفظ کنیم
علامت تفریق اینست − و آنرا منها تلفظ کنیم مثلاً ج + د علامت
حاصل جمع دو مقدار ج و د است و ج − د علامت تفاضل آنها یا باقی تفریق
د از ج و همچنین ج − د + ه یا ج + ه − د باینمعنی است که باید ج و ه
باهم جمع کرده و د را از میزان موضوع نمود
اینصورت × علامت ضرب است مثلاً ج × د علامت حاصل ضرب ج است
در د و گاه عوض این علامت نقطه قرار دهند باینصورت ج . د وگاه هیچ علامت
قرار ندهند مثل ج د که باز بمعنی حاصل ضرب آن دو مقدار است ولی اینصورترا
بیشتر در جبر و مقابله استعمال کنیم و درجائیکه بدانیم مقصود فاصله بین دو نقطه
ج و د باشد
اینصورت ج × (د + ه − ح) علامت حاصل ضرب ج است در جمله
د + ه − ح و اگر بخواهیم (ج + د) × (ج − د + ه) و در چنین صورت
آنچه میانه علامت جامعه نوشته شده حکم مقدار مفرد دارد
هرگاه عددی در جلو خط یا مقداری نوشته شود حکم مضروب فیه آنخط و مقدار را دارد
مثلاً اگر بخواهیم بنمائیم که خط ج د باید ثلاث امثال شود چنین مینویسیم ٣ ج د
و نصف زاویه ج را چنین مینویسیم ½ ج
مربع خط ج د چنین نوشته شود ج د^٢ و مکعبش چنین ج د^٣ و این دو اصطلاح را

ج با د را ضرب کنیم
در ج − د + ه
حاصل ضرب را چنین
مینوشتیم

در مقام خود شرح خواهیم داد

باینصورت — علامت استخراج ضلع است مثلاً ۴√ یعنی جذر ۴ است و √ج × د یعنی جذر حاصل ضرب ج × د است یا واسطه هندسی مابین

تنبیه گاه در ضمن ادای مطلب میخواهیم تمام بعضی روابط را که مابین اشکال باشد از قبیل تشابه در اینصورت هرگاه شکلی را بحروف ا و ب و ج و ... بنامیم شکل دیگر را نیز بهمان حروف بنامیم ولی با علامتی باینصورت اُ و بُ و جُ .... و تلفظ کنیم الف یک و با یک و غیره یا باینصورت اٌ و بٌ و جٌ و ... و تلفظ کنیم الف دو با دو جیم دو و غیره و هکذا

بسیار اتفاق می‌افتد که مطلبی را بشکل یا بقضیهٔ سابق تذکری حواله دهیم آنوقت باینصورت مثلاً بنامیم س ۱۷ و ۳|۱۲ یعنی رجوع کنید بشکل ۱۷ از مقالهٔ حاضره و بقضیهٔ ۱۲ از مقالهٔ سیم

علوم متعارفه

۱ دو مقدار مساوی با مقدار سیم متساوی باشند

۲ کل بزرگتر است از جزء خود

۳ کل مساویست با مجموع اجزای خود

۴ مابین دو نقطه از شوان وصل نمود جز بیک خط مستقیم

۵ دو مقدار را خط باشند یا سطح یا حجم متساوی گوئیم در آنصورت که هرگاه یکی از آنها را بر دیگر قرار دهیم در تمام وسعت خود بر همدیگر منطبق شوند

قضیه اول

از نقطه مفروضه بر خطی میتوان یك عمود بر آن خط اخراج نمود نه بیش

برهان فرض میکنیم خط ا م اول منطبق باشد بر ا د و بعد حول نقطه ا
دوران کند و حادث نماید دو زاویه مجاوره
م ا ج و م ا ب را که اولیش م ا ج
ابتدا بسیار کوچك است و متدرجا ترقی میکند
و دومینش م ا ب ابتدا بزرگتر از آنست
و متدرجا تنزل میکند تا بصفر رسد با این حرکت
زاویه م ا ج که ابتدا کوچکتر بود از م ا ب زود بزرگتر میشود و از این قرار در آن
ما بین موضعی برای خط متحرك پیدا میشود مثل ا م که آنجا دو زاویه متساوی باشند
و ظاهر است که بیش از یك موضع پیدا نشود

نتیجه جمیع زوایای قائمه متساوی باشند
مثلا خط ه د عمود است بر ا ب و ی ط
بر و ه و گوئیم زاویه ه د ب مساویست با
ح ط و

برهان خط ه د را نقل میکنیم بر ا ب چنانچه ط بر د واقع شود
آن وقت ط ح واقع میشود بر د ه و الا لازم آید که از نقطه مفروضه بر خطی توان
دو عمود بر آن خط اخراج نمود

قضیه دویم

چون خط ح د تلاقی کند ا ب را مجموع دو زاویه مجاوره ا ح

و ب ج د مساویست با دو قائمه

برهان از نقطهٔ ج عمود ج ه را بر خط ا ب اخراج کنیم آنوقت زاویهٔ ا ج د مساوی میشود با مجموع دو زاویهٔ ا ج ه و ه ج د پس ا ج د با ب ج د مساوی میشود با مجموع سه زاویه ا ج ه و ه ج د و ب ج د و زاویهٔ اول قائمه است و مجموع دو زاویهٔ دیگر نیز قائمه ب ج ه است پس مجموع دو زاویهٔ ا ج د و ب ج د بقدر دو قائمه است

نتیجه ۱ اگر یکی از دو زاویهٔ ا ج د و ب ج د قائمه باشد دیگر نیز قائمه است

نتیجه ۲ اگر د ه عمود باشد بر ا ب پس عکس ا ب نیز عمود باشد بر آن

برهان چون د ه عمود است بر ا ب زاویهٔ ا ج د مساوی میشود با مجاورهٔ خود د ج ب و هر دو قائمه اند و چون ا ج د قائمه شد مجاورهٔ آن ا ج ه نیز قائمه باشد پس زاویهٔ ا ج ه = ا ج د پس ا ب عمود است بر د ه

نتیجه ۳ - زوایای متتالیه ب ا ج و ج ا د و د ا ه و ه ا ب که در یک سمت خط ب د حادث گشته اند مجموع شان مساویست با دو قائمه زیرا که این مجموع بقدر مجموع دو زاویهٔ مجاوره ب ا ج و ج ا ب است

قضیهٔ سیم

هرگاه مجموع دو زاویهٔ مجاورهٔ احد و دحب دو قائمه باشد پس
دو ضلع خارجی اح و حب بر استقامت خطی واقع میشوند
برهان اگر حب بر استقامت اح نباشد
فرض میکنیم حه بر آن استقامت باشد و اقع
خط احه مستقیم است و بنابراین مجموع دو
زاویهٔ احد و دحه دو قائمه میشود (۲)
ولی بفرض مجموع دو زاویهٔ احد و دحب
دو قائمه بود پس احد + دحب = احد + دحه و از طرفین احد را حذف
میکنیم باقی میماند دحب = دحه یعنی جزو مساوی با کل و این محال است پس حب
واقع است بر استقامت اح

قضیهٔ چهارم

چون دو خط اب و ده متقاطع شوند دو زاویهٔ متقابله برأس مساوی باشند
برهان چون ده مستقیم است مجموع
دو زاویهٔ احد و احه دو قائمه باشد و چون
اب مستقیم است مجموع دو زاویهٔ احه و
بحه نیز دو قائمه است پس احد +
احه = احه + بحه و چون احه را
از طرفین اسقاط کنیم باقی میماند احد مساوی با مقابلهٔ خود بحه
و بهمین وجه ثابت میکنیم که زاویهٔ احه مساویست با مقابلهٔ خود بحد

شرح مجموع چهار زاویه حادثه در حول نقطه تقاطع دو خط مساویست با چهار قائمه
زیرا که مجموع ا ج ه + ب ج ه دو قائمه است
و کذا مجموع ا ج د + ب ج د و کلیتاً اگر چند
خط مثل ج ا و ج ب و غیره بر نقطه ج متقاطع
شوند مجموع زوایای متوالیه ا ج ب و ب ج د و د ج ه
و ه ج ز مساوی میشود با چهار قائمه زیرا که اگر بر نقطه ج دو خط رسم کنیم عمود بر همدیگر
حادث میشود چهار قائمه و مجموع آنها مساویست با مجموع زوایای مذکوره ا ج ب و غیره

قضیه پنجم

هرگاه بر نقطه ه از خط ا ب دو خط ه ج و ه د را در طرفینش چنان
رسم کنیم که دو زاویه ج ه ا و ب ه د متساوی شوند گوییم ه د بر استقامت
ه ج واقع میشود
برهان فرض میکنیم ه ز بر استقامت ه ج
باشد آنوقت بنا بر ق ۴ ج ه ا = ب ه ز
و بنا بر فرض ب ه د = ج ه ا پس ب ه د
مساوی میشود با ب ه ز و این محال است

قضیه ششم

هرگاه دو ضلع و زاویه بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو ضلع و زاویه
بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساوی باشند
مثلا زاویه ا = زاویه د و ضلع ا ب = د ه و ضلع ا ج = د ز میگوییم مثلث
ا ب ج = د ه ز

برهان بعمل انطباق ضلع ده را قرار میدهیم بر اب بطوریکه نقطه د بر ا واقع شود و نقطه ه بر ب آنوقت زاویه د چون مساویست با زاویه ا ضلع دز واقع میشود بر استقامت اج و بغرض دز مساویست با اج پس نقطه ز واقع میشود بر ج و ضلع سیم هز منطبق میشود بر بج و بنابراین مثلث دهز برابر اب ج

نتیجه از اینکه دو مثلث سه جزو متساوی باشند زاویه ا = د و ضلع اب = ده و ضلع اج = دز استنباط میشود که سه جزو دیگر نیز متساوی میشوند زاویه ب = ه و زاویه ج = ز و ضلع بج = هز

قضیه هفتم

هرگاه دو زاویه و ضلع بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو زاویه و ضلع بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آنها و مثلث متساوی هستند مثلا در شکل سابق ضلع بج = هز و زاویه ب = ه و زاویه ج = ز و گوئیم مثلث دهز مساویست با مثلث ابج

برهان بعمل انطباق ضلع هز واقع میشود بر مساوی خود بج و نقطه ه بر ب و نقطه ز بر ج و زاویه ه چون مساویست با ب ضلع هد واقع میشود بر استقامت با و بنابراین نقطه د واقع میشود بر نقطه از خط با و همچنین زاویه ز چون مساویست با ج خط زد واقع میشود بر استقامت جا و نقطه د بر نقطه از ضلع جا پس نقطه د میبایست

بکمر بنه واقع شود بر دو خط ب ا و ح ا پس واقع خواهد شد بر فصل مشترک آنها نقطه
ا و آنوقت دو مثلث درست منطبق میشوند و متساوی میگردند

نتیجه از اینکه دو مثلث سه جزو متساوی باشد ضلع ب ح = ه د و زاویه
ب = ه و زاویه ح = د چنین استنباط میشود که سه جزو دیگر نیز متساوی
میشوند ضلع ا ب = د ه و ا ح = د ر و ا = د

قضیهٔ هشتم

در هر مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر

برهان خط ب ح چون مستقیم است اقصر فاصله
باشد ما بین دو نقطه ب و ح نقطه پس ب ح
اقصر است از مجموع ا ب + ا ح

باید نیز دانست که هر ضلع اعظم است از تفاضل دو ضلع دیگر مثلاً ضلع بزرگتر را
ا فرض میکنیم و دو ضلع دیگر را ب و ح آنوقت بحکم همین شکل ا < ب + ح
و چون ح را از طرفین اسقاط کنیم چنین میشود ا - ح < ب یعنی ب اعظم است
از تفاضل ا و ح و چون ب را اسقاط کنیم ا - ب < ح

قضیهٔ نهم

چون از نقطهٔ ه مفروضه در داخل مثلث ا ب ح دو خط ه ب و ه ح
را بطرفین ضلع ب ح وصل کنیم مجموع این دو خط اقصر است از مجموع دو خط
ا ب و ا ح

برهان خط ب ه را امتداد میدهیم تا ا ح را بر نقطه د قطع کند آنوقت بنا بر
قضیه خط ه ح اقصر است از مجموع ه د + د ح و چون ب ه را بر طرفین

میفزائیم چنین میشود ب ه + ه ج < ب ه
+ ه د + د ج یا آنکه ب ه + ه ج < ب د
+ د ج وهمچنین ب د < ب ا + ا د وچون
د ج را بر طرفین بیفزائیم چنین میشود ب
د + د ج < ب ا + ا ج وچون این با
مساوات سابق بسنجیم بطریق اولی چنین میشود ب ه + ه ج < ب ا + ا ج

قضیهٔ دهم

محیط هر کثیر الاضلاع محدب مثل ا ب ج د اقصر است از هر نوع خطی مثل ه ب که از اطراف بر او احاطه کرده باشد

برهان اضلاع کثیر الاضلاع ا ب ج د را در یک امتداد دهید تا منتهی شوند بخط محیط آن وقت این چند نامساوات نتیجه شود

ا ب + ب ط < ا ل + ل ه + ه ط

ب ج + ج ح < ب ط + ط ب + ب ح

ج د + د ع < ج ح + ح ط + ط ع

د ا + ا ل < د ع + ع م + م ل

وبعد از جمع آنها واسقاط مشترکات چنین میشود

ا ب + ب ج + ج د + د ا < ه ب + ب ح + ح م + م ه

وهمین حجه نیز ثابت میشود که محیط هر خط منکسر محدب اقصر است از خط احاطه کننده که بطرفین آن منتهی شده باشد

قضیهٔ یازدهم

هرگاه دو ضلع مثلثی مساوی باشد با دو ضلع مثلث دیگر نظیر بنظیر
و زاویهٔ حادثه ما بین دو ضلع اوّل اعظم باشد از زاویهٔ حادثه ما بین
دو ضلع دوّم گوئیم که ضلع سیم مثلث اوّل اطول است از ضلع سیم مثلث دوّم

برهان دو مثلث را چنان ترتیب میدهیم که
ضلع اد در هر دو مشترک باشد و دو
ضلع متساوی دیگر اب و اج در طرفین
آن فتند و فرض اینست که زاویهٔ باد
> جاد

زاویهٔ باد را بخط اه نصف میکنیم این خط واقع شود در زاویهٔ اعظم اج
و خط ده را وصل میکنیم آنوقت بنابر ق ٤ دو مثلث باه و
هاد متساوی میشوند پس به = هد ولی در مثلث هدج ضلع جد
< هد + هج و چون در این نامساوات هد را بدل کنیم به به چنین میشود

جد < به + هج یعنی جد < بج

و بالعکس اگر دو ضلع اب و اج از مثلث ابج مساوی باشند
بدو ضلع اج و اد از مثلث اجد و ضلع سیم جب از مثلث اوّل اطول
باشد از ضلع سیم جد از مثلث دوّم گوئیم زاویهٔ باج اعظم است از
زاویهٔ جاد زیرا که اگر این زاویه کوچکتر میبود از جاد لازم می‌آمد که جب
اقصر باشد از جد و این خلاف فرض است و اگر مساوی میبود با جا
آنوقت بنابر ق ٤ جب مساوی میشد با جد و اینحکم نیز خلاف فرض است

قضیهٔ دوازدهم

هرگاه سه ضلع مثلثی مساوی باشند با سه ضلع مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساوی هستند

مثلاً ضلع اب = ده و اج = در و بج = هر میگوئیم زاویهٔ ا = د و ب = ه و ج = ر

برهان اگر زاویهٔ ا مثلاً بزرگتر بود از زاویهٔ د چون دو ضلع اب و اج مساوی هستند با دو ضلع ده و در نظیر بنظیر پس بحکم قضیهٔ سابقه ضلع بج اطول میشود از هر و اگر زاویهٔ ا را کوچکتر از د فرض کنیم آنوقت لازم می آید که ضلع بج اقصر باشد از هر و چون بج مساوی با هر فرض شده زاویهٔ ا نمیتواند اعظم باشد از د و نه اصغر پس مساوی است و بهمین وجه ثابت میکنیم که زاویهٔ ب = ه و زاویهٔ ج = ر

شرح ملاحظه نمائید که هر دو زاویهٔ متساوی مقابل شده اند بدو ضلع متساوی مثلاً دو زاویهٔ متساوی ا و د مقابل اند بدو ضلع متساوی بج و هر

قضیهٔ سیزدهم

در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویهٔ مقابل بدو ضلع متساوی متساوی هستند مثلاً ضلع اب = اج پس زاویهٔ ج مساوی است با ب

برهان ... از راس ا بر نقطهٔ د از وسط قاعدهٔ بج ... وصل میکنیم آنوقت در دو مثلث ابد و اجد سه ضلع نظیر بنظیر متساوی ... ضلع اد مشترک است و بفرض اب = اج و بجعل بد = ...

ب‌د‌ج پس بحکم قضیهٔ سابقه زاویهٔ ب مساوی میشود با ج

نتیجه ـ هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوایا نیز باشد

شرح ـ از تساوی دو مثلث اب‌د و اج‌د لازم آید که زاویهٔ ب‌اد = د‌اج و ب‌د‌ا = ا‌د‌ج پس این دو زاویهٔ اخیر قائمه اند و بنابراین خط مرسوم از راس مثلث متساوی الساقین بر وسط قاعده عمود است بر این قاعده و زاویهٔ راس را نصف میکند

در مثلث غیر متساوی الساقین هر ضلع را میتوان قاعده فرض نمود و آن وقت راسش زاویه است که مقابل باشد بآن ضلع ولی در مثلث متساوی الساقین قاعده مخصوصاً ضلع سیم است غیر از دو ساق متساوی

قضیهٔ چهاردهم

هرگاه دو مثلث دو زاویه متساوی باشند ضلعین مقابل بآن دو زاویه متساوی هستند

مثلاً فرض میکنیم زاویهٔ اب‌ج = اج‌ب و میگوئیم اج = اب

برهان ـ مثلث اَبَ‌جَ را مساوی با مثلث اب‌ج رسم میکنیم چنانچه زاویهٔ بَ = ب و جَ = ج و ضلع بَ‌جَ = ب‌ج و آنرا معکوساً منطبق میکنیم بر اب‌ج بر وجهی که ضلع جَ‌بَ واقع شود بر ب‌ج یعنی جَ بر ب و نقطهٔ بَ بر ج و چون زاویهٔ جَ = ج = ب ضلع جَ‌اَ واقع میشود بر استقامت ب‌ا و نقطهٔ اَ بر ا و نتیجه میشود اَبَ = اج و بنابراین اب = اج

قضیهٔ پانزدهم

از دو ضلع هر مثلث اطول آنست که مقابل باشد بزاویهٔ اعظم و بالعکس از دو زاویهٔ مثلث اعظم آنست که موتر باشد بضلع اطول

اولاً فرض میکنیم زاویهٔ ج > ب و میگوئیم ضلع اب مقابل بزاویهٔ ج اطول است از ضلع اج مقابل بزاویهٔ ب

برهان زاویهٔ ب ج د را مساوی ب جدا کنید آنوقت در مثلث ب د ج (۱۴) ضلع ب د = د ج ولی ضلع اج اقصر است از اد + دج و این مجموع مساویست با اد + د ب = اب پس اب اطول است از اج

ثانیاً فرض میکنیم ضلع اب > اج و میگوئیم زاویهٔ ج مقابل بضلع اب اعظم است از زاویهٔ ب مقابل بضلع اج زیرا که اگر فرض کنیم ج < ب پس بحکم مذکور اب < اج و این خلاف فرض است پس لابد زاویهٔ ج باید اعظم باشد از ب[۲]

[۲] و فرض کنیم ج = ب پس بموجب (...) اب = اج نیز خلاف فرض است

قضیهٔ شانزدهم

از نقطهٔ مفروضه در خارج خطی میتوان یک عمود بر آن خط فرود آورد نه بیش

اولاً ا نقطهٔ مفروضه است و ج د خط مفروض پس جزء اعلای سطح را حول ج د حرکت میدهیم تا بجزء سفلی منطبق شود و ا از نقطهٔ ا' باشد در آنجا و ا ا' را وصل میکنیم آنوقت اگر جزء سفلی ا' ج د را حول ج د بعکس حرکت دهیم تا نقطهٔ ا' بمقام اول خود معاودت کند خط ا' ه درست منطبق شود بر ا ه و زاویهٔ ا' ه ج درست میپوشاند زاویهٔ ا ه ج را و چون این دو زاویه

مجاوره اند زاویه ا ه ح قائمه است پس ا ه عمود باشد بر ح د
ثانیاً فرض میکنیم که از نقطه ا بتوان دو عمود ا ه و ا ب را بر ح د اخراج
نمود پس یکی از آن دو عمود مثلاً ا ه را امتداد میدهیم بقدری که ه ا' مساوی شود
با ا ه و خط ا' ب را وصل میکنیم آنوقت مثلث ا ه ب مساوی میشود با ا' ه ب
چونکه دو زاویه ا ه ب و ا' ه ب قائمه اند و ضلع ا ه = ا' ه و ضلع ب ه مشترک
است پس زاویه ا ب ه مساوی میشود با ه ب ا' و چون زاویه ا ب ه قائمه است
ه ب ا' نیز قائمه میشود و درینصورت چون مجموع دو زاویه مجاوره ا ب ه و ه ب ا'
دو قائمه شد باید خط ا ب ا' مستقیم باشد و آنوقت لازم اید که بتوان مابین دو نقطه
ا و ا' را بدو خط مستقیم وصل نمود

قضیهٔ هفدهم

چون از نقطه ا واقعه در خارج خط د ه عمود ا ب را بر آن خط فرود آوریم
و خطوط مایله ا ه و ا ح و ا د و غیره را بر نقاط مختلفه آن خط وصل کنیم
اولاً عمود ا ب اقصر است از هر خط مایلی و ثانیاً هر دو مایل متساوی البعد از
موقع عمود مثل ا ح و ا ه که بیک بعد متساوی ب ح و ب ه در طرفین
واقع شده اند متساوی هستند و ثالثاً از هر دو خط مایلی مثل ا د و
ا ح یا ا ه و ا د انکه از موقع عمود ابعد باشد اطول است

برهان عمود ا ب را باندازه خودش تا نقطه د' امتداد
میدهیم و دو خط د' ح و د' ه را وصل میکنیم
آنوقت مثلث ب ح د' مساوی شود با ب ح ا
چونکه دو زاویه ح ب د' و ح ب ا قائمه اند و ساق

وضلع ج ب مشترک است وضلع ب د = ب ا پس و ث ضلع سیم ج د
مساوی شود با ضلع سیم ا ج و چون خط مستقیم ا ب و اقصر است از منکسر
ا ج د پس ا ب نصف ا ب د اقصر میشود از
ا ج نصف ا ج د یعنی عمود اقصر است از
هر خط مایل

ثانیاً چون ب ه را مساوی ب ج
فرض کنیم و ا ب مشترک است و زاویه
ا ب ه = ا ب ج مثلث ا ب ه مساوی میشود با مثلث ا ب ج و ث د
و دو ضلع ا ه و ا ج متساوی گردند یعنی دو مایل متساوی البعد از موقع عمود متساوی باشند

ثالثاً در مثلث د د ا مجموع دو خط ا ج و ج د اقصر است از مجموع دو ضلع ا د و د د و ف و بنابراین ا ج نصف ا ج د اقصر میشود از ا د نصف ا د د
یعنی از دو خط مایل هر کدام ابعد باشد از موقع عمود اطول است

نتیجه ۱ - فاصله حقیقی نقطه از خطی بطول عمود مشخص شود چونکه عمود اقصر است از سایر خطوط

نتیجه ۲ - از نقطه مفروضه نمیتوان سه خط متساوی بخطی وصل نمود والا لازم آید
در یک سمت عمود دو مایل متساوی واقع شود

قضیه هیجدهم

چون از نقطه ج واقع بر وسط خط ا ب عمود ه د را بر آن خط اخراج
کنیم اولاً هر نقطه از این عمود متساوی
البعد است از طرفین ا ب و ثانیاً هر نقطه
واقعه در خارج عمود غیر متساوی البعد

ازطرفین دو طرف

برهان اولاً چون اد = دب دو مایل اد و دب متساوی البعد میشوند از موقع عمود و بنابراین متساوی باشند و همچنین دو مایل اه و هب و دو مایل ار و رب پس معلوم شد که هر نقطه از عمود متساوی البعد است از طرفین اوب

ثانیاً — ط نقطه ایست خارج عمود و دو خط طا و طب را وصل میکنیم پس یکی از این دو خط عمود را بر نقطه د قطع میکند خط دب را نیز وصل میکنیم آنوقت دب = دا ولی طب اقصر است از مجموع طد + دب = طد + دا = طا پس طب < طا یعنی هر نقطه که در خارج عمود فرض شود غیر متساوی البعد است از طرفین

نتیجه — هر خط که نقاطش دارای خاصیت مشترک باشد و در نقاط خارج آن خط آن خاصیت نباشد مکان هندسی آن نقاط گوئیم مثل خط ده که مکان هندسی نقاط متساوی البعد است از دو نقطه ا و ب

قضیه نوزدهم

هرگاه در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع متساوی باشند آن دو مثلث متساوی هستند

مثلاً وتر اج = دو و ضلع اب = ده پس گوئیم مثلث ابج مساویست با دهو

برهان در این دو مثلث اگر ضلع سیم بج مساوی هو باشد حکم ثابت میشد حال فرض میکنیم متساوی نباشند و بج بزرگتر باشد از نظیر خود پس بح را مساوی هو جدا میکنیم و اح را وصل مینمائیم آنوقت مثلث ابح مساوی میشود با دهو چونکه دو زاویه ب و ه قائمه اند و متساوی و ضلع اب = ده و ضلع بح

= ه د پس اح = د ولی بفرض د مساوی است با اد پس اح = اد
و این تساوی صحیح نباشد چونکه مایل اد ابعد است از مواقع عمود وطا پس حد
اختلاف نداشته باشد با ه د و مثلث اد ح مساوی باشد با د ه د

قضیه بیستم

در دو مثلث قائم الزاویه هرگاه وتر و زاویه متساوی باشند آن دو مثلث
متساوی هستند

مثلاً اح = د و زاویه ا = د
پس بدلیل انطباق د ه د را بر مثلث

میکنیم برا ب ح بروجیکه د واقع شود بر ا و آنوقت زاویه د چون مساوی است
با ا ضلع د ه واقع میشود بر استقامت ا ب و درانصورت ه واقع تواند شد
بر استقامت ح ب والا لازم آید که از ح بتوان دو عمود بر ا ب فرود آورد
پس نقطه ه منطبق میشود بر ب و دو مثلث متساوی میگردند

قضیه بیست و یکم

اولاً هر نقطه مثل م که فرض شود بر خط منصف الزاویه ب اد متساوی
البعد است از ضلعین از زاویه وثانیاً هر نقطه مثل ه که در خارج
ا لخط فرض شود غیر متساوی البعد است از همان دو ضلع

برهان – اولاً از نقطه م واقعه بر منصف الزاویه ب اد دو عمود م د
و م ح را بر اد و اب فرود آوریم تا دو مثلث قائم الزاویه م اد و م اح
متساوی گردند چونکه وتر م ا در هر دو مشترک است و دو زاویه م اد و م اح متساوی

پس م د = م ح

ثانیاً از نقطهٔ ه واقعه در خارج منصف الزاویه دو عمود هد و هب را بر اد و اب فرود آورید و از نقطهٔ م آنجا که خط هد منصف الزاویه را قطع میکند عمود مج را بر اب فرود آورید و هج را وصل کنید آنوقت در مثلث جهم ضلع جه < مج + مه و چون مج = مد پس جه < هد و به < جه پس به < هد

شرح خط منصف الزاویه مکان هندسی نقاطی است که متساوی البعد باشند از ضلعین آن زاویه

قضیهٔ بیست و دوم

هرگاه دو خط اد و بد عمود باشند بر خط ثالث جد پس متوازی هستند

چونکه اگر متلاقی میشدند مثلاً بر نقطهٔ م آن وقت لازم می‌آید که از آن نقطه دو عمود بر جد فرود آمده باشند

حکم — اگر یکی از دو خط اب و دج عمود باشند بر جب و دیگری مایل بر آن بعد از امتداد متلاقی میشوند اینحکم ظاهر است و محتاج بدلیل نیست

قضیهٔ بیست و سیم

بر نقطه میتوان خطی بموازات خط دیگر مرور داد و بیش از یک موازی ممکن نیست

برهان — از نقطهٔ ا عمود اد را بر حد
فرود آورید و از همان نقطه اد را عمود
بر اد پس دو خط اب و حد متوازی شوند
و ۳ حال میگوئیم که غیر از خط اب هر خط
مثل اط که برا مرور کند دیگر موازی حد نباشد چونکه
حد عمود است بر اد و اط مایل است نسبت بآن

قضیهٔ بیست و چهارم

هرگاه دو خط حد و اب متوازی باشند و خط رح عمود شود بیکی از
آن دو مثلاً بر اب پس عمود باشد بر خط دیگر حد
برهان اولاً ظاهر است که رح باید تلاقی نماید
حد را والا لازم آید که بر نقطهٔ ر دو خط مرور شود
باشد موازات حد و بعد از وقوع ملاقات گوئیم
عمود شود بر حد والا حد مایل باشد بر رح
و اب عمود است بر آن و در اینصورت متلاقی
میشوند و این خلاف فرض است

قضیهٔ بیست و پنجم

هرگاه دو خط اب و حد متوازی باشند با خط ثالث هر پس متوازی
هستند نسبت بهمدیگر
چونکه اگر این دو خط اب و حد متلاقی
گردند بر نقطهٔ مثل م آنوقت لازم آید که

که ازین نقطه بتوان دو خط بموازات ه د رسم نمود

حدود

هرگاه دو خط اب و حد را خط ثالث ه د قطع کند هشت زاویه حول دو نقطه فصل مشترک ط و ح احداث شود

چهار زاویه ۱ و ۴ و ۵ و ۸ واقعه مابین دو خط اب و حد را زوایای داخله گوئیم و چهار زاویه دیگر را خارجه

و دو زاویه داخله ۱ و ۵ را که طرفین قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متبادله داخله گوئیم و دو زاویه داخله و خارجه ۸ و ۲ را که در یکسمت قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متقابله گوئیم

و دو زاویه خارجه غیر مجاوره ۳ و ۶ را که در طرفین قاطع واقع شده اند متبادله خارجه

قضیه بیست و ششم

چون دو خط متوازی را خط ثالثی قطع کند گوئیم اولاً دو زاویه متبادله داخله متساوی باشند و ثانیاً دو زاویه متبادله خارجه متساوی باشند و ثالثاً دو زاویه خارجه و داخله متقابله متساوی باشند و رابعاً دو زاویه داخله واقعه در یک سمت قاطع مجموعشان مساوی با دو قائمه

برهان اولاً دو متوازی اب و حد قاطع طی پس از نقطه ه وسط ... عمود ه م را بر اب فرود آوریم آنخط عمود میشود

ه ح = ب د و دو مثلث قائم الزاویه م ه ر و ه ن ـ متساوی می‌شوند چونکه بفرض ه و = ه ر ه د و ه ـ متساوی هستند و دو زاویه م ه ر و ـ ه ن نیز متساوی و از تساوی این دو مثلث دو زاویه متبادله داخله م ر ه و ه ـ ن متساوی شوند

و نیز بهمانواسطه دو زاویه ب ر ـ و ـ ح که تمام دو زاویه م ر ه و ه ـ ن اند قائمه و متساوی اند

ثانیاً دو زاویه متبادله خارجه ط ر ب و ح ـ ی متساوی هستند چونکه متقابله بزاویه اند با دو زاویه متبادله داخله م ر ه و ه ـ ن

ثالثاً دو زاویه متقابله ط ر ب و ر ـ د متساوی هستند چونکه ط ر ب = ا ر ـ و ا ر ـ = ط ـ د

رابعاً مجموع دو زاویه ب ر ـ و ر ـ د مساوی است با دو قائمه چونکه ب ر ـ + ا ر ـ = قائمتین و ا ر ـ = ر ـ د

قضیه بیست و هفتم

هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند بر وجهی که دو زاویه متبادله داخله متساوی شوند یا دو زاویه متبادله خارجه یا دو زاویه خارجه و داخله متقابله و یا مجموع دو زاویه داخله حادثه در یک سمت قاطع مساوی شود با دو قائمه در این چهار صورت آن دو خط متوازی هستند

دو خط مفروض اب است و ح د و خط قاطع ط ح

برهان گوییم اگر دو زاویه متبادله داخله ا ه د و ه د ح متساوی باشند اب موازی است

با جد والا بر نقطه ه خط ه ل را بموازات جد رسم میکنیم انوقت دو زاویه
ل ه د و ه د ه چون متبادله داخله اند متساوی باشند و بنا بر فرض اه د
مساوی بود با ه د ه پس اه د مساوی میشود با ل ه د و این محال است

ثانیاً اگر دو زاویه متبادله خارجه ط ه ب و د ی ح متساوی باشند دو
زاویه اه د و ه د ه مقابله راس با آن دو زاویه متساوی میشوند و انوقت
بنا بر حکم اول اب موازی میشود با جد

ثالثاً اگر دو زاویه خارجه و داخله متقابله ط ه ب و ه د ه متساوی باشند
وچون ط ه ب مساویست با اه د پس اه د مساوی شود با ه د ه و بحکم اول
اب موازی شود با جد

رابعاً اگر مجموع دو زاویه ب ه د و ه د ه مساوی باشد با دو قائمه و چون
ب ه د + اه د = ۲ق پس اه د = ه د ه و اب موازی شود با جد

قضیهٔ بیست و ششم

هرگاه اضلاع دو زاویه متوازی باشند پس ان دو زاویه متساوی
هستند یا تمام همدیگر اند تا دو قائمه

دو زاویه مفروضه ا ب ج است و ه د ط
که اضلاعشان متوازی هستند و متساوی هستند زیرا
پس گوئیم این دو زاویه متساوی هستند زیرا
که دو زاویه ه ل ج و ه ه د چون متقابله اند
متساوی باشند و همچنین ه ل ج = ا ب ج
پس ا ب ج = ه ه د

ثانیاً دو زاویهٔ مفروضه ا ب ج است و د ه م که اضلاعشان متوازی باشند
ولی دو ضلع ب ا و ه د در یک جهت ممتد اند و دو ضلع ب ج و ه م در دو جهت مخالف
گوییم تمام همدیگر اند تا دو قائمه زیرا که د ه م تمام د ه و است و د ه و مساوی ا ب ج است

قضیهٔ بیست و نهم

هرگاه اضلاع دو زاویه عمود باشند بر همدیگر آن دو زاویه متساوی مستند یا تمام همدیگر

دو زاویه که اضلاعشان عمود باشند بر همدیگر ب ا ج است و د ه و پس از نقطهٔ ا خط ا ز را
عمود میکنیم بر ا ب و خط ا ح را بر ا ج آن وقت این دو خط متوازی میشوند با
ه د و ه و و هم ممتد اند در یک جهت پس زاویهٔ ح ا ز = د ه و ولی ب ا ز + ز ا ح
= ق و ب ا ح + ح ا ج = ق پس ز ا ح = ب ا ج

شرح - هرگاه بجای د ه و زاویهٔ د ه ط را اختیار کنیم که حادث شده است
ما بین ه و و استقامت د ه ظاهر است که این زاویه تمام ب ا ج است تا دو قائمه

قضیهٔ سی ام

مجموع زوایای هر مثلث مساویست بدو قائمه

برهان ا ه را بموازات ب ج رسم کنیم و ج ا را امتداد دهیم آنوقت
دو زاویهٔ ا ج ب و ه ا د چون نسبت بدو متوازی ب ج و ا ه و ج د قاطع

اح مقابل اند متساوی باشند دو زاویه حب ا و ب اه چون متبادله اند
نسبت بیان دو متوازی و بقاطع اب متساوی هستند پس مجموع زوایای مثلث مساوی
شد بمجموع سه زاویه حاب و ب اه و ه اد حادثه حول نقطه ا و در یک سمت دح
و جمع ثانی مساویست با دو قائمه پس جمع اول نیز دو قائمه است

نتیجه ۱ در هر مثلث ممکن نیست بیش از یک زاویه قائمه موجود شود و بدلیل اولی بیش از یک زاویه منفرجه

۲ — در مثلث قائم الزاویه مجموع دو زاویه حاده مساویست بیک قائمه

۳ — در مثلث هرگاه مجموع دو زاویه معلوم باشد اگر از دو قائمه تفریق کنیم باقی زاویه سیم است

۴ — در مثلث اب ح زاویه خارجه ب اد حادثه از ضلع ب ا باستقامت اد مساویست بمجموع دو زاویه داخله حب ا و ب ح ا

قضیهٔ سی و یکم

مجموع زوایای داخله هر کثیر الاضلاع محدب مساویست بعدد اضلاعش منهای دو ضرب بدو قائمه

برهان از یکی از رئوس مثلا ا اقطاری کشیده ایم که منتهی شوند بجمیع رئوس غیر مجاوره تا کثیر الاضلاع بمثلثات قسمت شود و عدد این مثلثات برابر است با عدد اضلاع منهای دو زیرا که چون نقطه ا را رأس مشترک جمیع قرار دهیم قاعدهٔ هر کدام ضلعی میشود از کثیر الاضلاع غیر از دو مثلث طرفین که هر کدام صاحب دو ضلع میشوند و مجموع زوایای این مثلثات مساویست بمجموع زوایای کثیر الاضلاع و اینجا حاصل جمع بعدد مثلثات مرکب از

دو قائمه است یعنی دو واحد کمتر از عدد اضلاع شامل دو قائمه است پس اگر عدد اضلاع را ع فرض کنیم مجموع زوایای کثیر الاضلاع بحسب قائمه چنین میشود

۲ع - ۴ یا ۲ × (ع - ۲)

قضیهٔ سی و دوم

چون جمیع اضلاع کثیر الاضلاع محدّب را بیک جهة امتداد دهیم مجموع زوایای خارجه که حادث شود مساویست با چهار قائمه

برهان هر زاویه داخل باضافه خارجه مجاورش مساویست با دو قائمه پس مجموع زوایای داخله و خارجه کثیر الاضلاع مساویست با ۲ع قائمه (ع عدد اضلاع است) و چون مجموع زوایای داخله مساوی شد با (۲ع - ۴) قائمه پس مجموع زوایای خارجه بقدر فضل جمع اوّل بر ثانی یعنی ۴ قائمه

قضیهٔ سی و سیّم

در شکل متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل متساوی باشند و همچنین هر دو زاویهٔ مقابله

برهان - قطر ب د را وصل کنید آنوقت در دو مثلث ا د ب و ب د ج ضلع ب د مشترک است و نسبت بدو خط متوازی ا د و ب ج زاویه ا د ب = د ب ج و ع۲ و نسبت بدو خط متوازی ا ب و ج د زاویه ا ب د = ب د ج

پس (۲۰) این دو مثلث متساوی هستند و ضلع اب مقابل بزاویه ادب مساوی میشود با ضلع دج مقابل بزاویه دبج و همچنین ضلع سیم اد مساوی میشود با ضلع بج یعنی که هر دو ضلع متقابل متساوی هستند ثانیاً از تساوی همان مثلث زاویه ا مساوی میشود بزاویه ج و زاویه ادج مرکب از دو زاویه ادب و بدج = زاویه ابج مرکب از دو زاویه دبج + ابد یعنی که دو زاویه متقابل متساوی باشند

نتیجهٔ ۱ـ هر دو خط متوازی مثل اب و جد که واقع باشند مابین دو متوازی دیگر اد و بج متساوی هستند

نتیجهٔ ۲ـ فاصلهٔ دو خط متوازی همه جا یکی است زیرا که چون از دو نقطهٔ ط و ح از موازی اب دو عمود طه و حد را اخراج کنیم این دو خط متوازی میشوند و متساوی چون واقع شده اند مابین دو متوازی

قضیهٔ سی و چهارم (۳۴)

هرگاه در یک ذوات اربعه الاضلاع ابجد هر دو ضلع متقابل متساوی باشد مثلا اب = جد و اد = بج گوئیم اضلاع متساوی نیز متوازی هستند و شکل متوازی الاضلاع است

برهان قطر بد را وصل میکنیم و دو مثلث ابد و بدج چون اضلاع شان نظیر بنظیر متساوی است متساوی باشند و زاویه ادب مقابله بضلع اب مساوی است با زاویه دبج مقابله بضلع جد پس (۲۷)

ضلع اد موازیست با ب ج و بهمان دلیل اب موازیست با ج د پس شکل اب ج د
متوازی الاضلاع است

قضیه سی و پنجم (۳۵)

هرگاه در ذو اربعة الاضلاعی (شکل سابق) دو ضلع مقابل اب و ج د
متساوی و متوازی باشند پس دو ضلع دیگر نیز متساوی و متوازی هستند
و شکل اب ج د متوازی الاضلاع است

برهان قطر ب د را وصل کنید آنوقت چون اب موازی است با ج د دو زاویه
متبادله داخله اب د و ب د ج متساوی است ق ۲۹ و بفرض اب = ج د و
ضلع د ب مشترک پس مثلث اب د مساویست با د ب ج ق ۴ پس ضلع
اد = ب ج و زاویه اد ب = د ب ج و بنابراین اد موازیست با ب ج
و شکل اب ج د متوازی الاضلاع است

قضیه سی و ششم

دو قطر اج و ب د از متوازی الاضلاع اب ج د منصف همدیگراند
بنقطه تقاطع ه

برهان در مقایسه دو مثلث اده و ج ه ب ضلع
اد = ج ب و زاویه اده = ج ب ه ق ۲۹ و زاویه د
داه = ه ج ب پس این دو مثلث متساوی باشند و ضلع اه مقابل بزاویه اده = ه ج و ضلع
ده مقابل بزاویه ه اد = ه ب

شرح - در شکل معین دو ضلع اب و ب ج متساوی باشند و دو مثلث اه ب و ه ب ج
چون جمیع اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند متساوی‌اند و بنابراین زاویه اه ب

ت ب ه و بعضی که در معیّن و قطر بزوایای قائمه متقاطع شوند

مقالهٔ سیم

حدود

١ - محیط دایره خطی است منحنی که جمیع نقاطش بیک فاصله باشند از نقطهٔ داخله که موسوم است بمرکز و سطح دایره وسعتی است محدود و محصور بان خط منحنی

و کلمهٔ دایره را هم بر محیط اطلاق کنیم و هم بر سطح ولی از سیاق کلام مقصود معلوم شود و در معنی اختلاف کلی است

٢ - هر کدام از خطوط ج ا و ج ب و ج ه و ج ز وغیره که واصل‌اند مابین مرکز و نقطهٔ از محیط را نصف قطر و شعاع گوئیم و خط ا ب را که بمرکز گذشته و از طرفین بمحیط منتهی گشته است قطر گوئیم

و بنا بر تعریف دایره جمیع اشعه متساوی باشند و همچنین جمیع اقطار و هر قطر مضاعف شعاعی باشد

٣ - قوس دایره قطعه‌ایست از محیطش مثل د ح ط و وتر خطی است مثل د ط واصل مابین طرفین قوس

٤ - قطعهٔ دایره جزئی است از سطحش محصور مابین قوس و وتر و وتر د ط همواره

مقابل است بدو قوس ب ج ط و ده ط و بنابراین بدو قطعه ولی مقصود قطعه کوچکتر است مگر آنکه قید شود

۵ـ قطاع دایره جزئی است از آن محصور ما بین قوس ده و دو نصف قطر ج د و ج ه

۶ـ خط محاط در دایره آنستکه طرفینش منتهی باشد بمحیط مثل خط ا ب

زاویه محاطیه آنستکه رأسش واقع باشد بر محیط و حادث باشد ما بین دو وتر مثل زاویه ب ا د

مثلث محاطی آنستکه رئوسش واقع باشند بر محیط مثل مثلث ب ا د و بطور کلی شکل محاطی آنست که رئوس جمیع زوایایش واقع باشد بر محیط و دراینصورت دایره را نسبت بآن محیطی گوئیم

۷ـ قاطع خطی است که محیط را بدو نقطه قطع کند مثل خط ا ب

۸ـ خط مماس آنست که با دایره در یک نقطه مشترک باشد نه بیش مثل خط ج د و نقطه مشترکه م را نقطه مماس گوئیم

۹ و همچنین دو دایره را نسبت بهم مماس گوئیم هرگاه مشترک باشند در یک نقطه نه بیش

شرح ـ بطور کلی مماس بر منحنی حد اوضاع قاطع است بنابراینکه حول نقطه منحنی ا انقدر دوران کند که نقطه مقطع دیگر

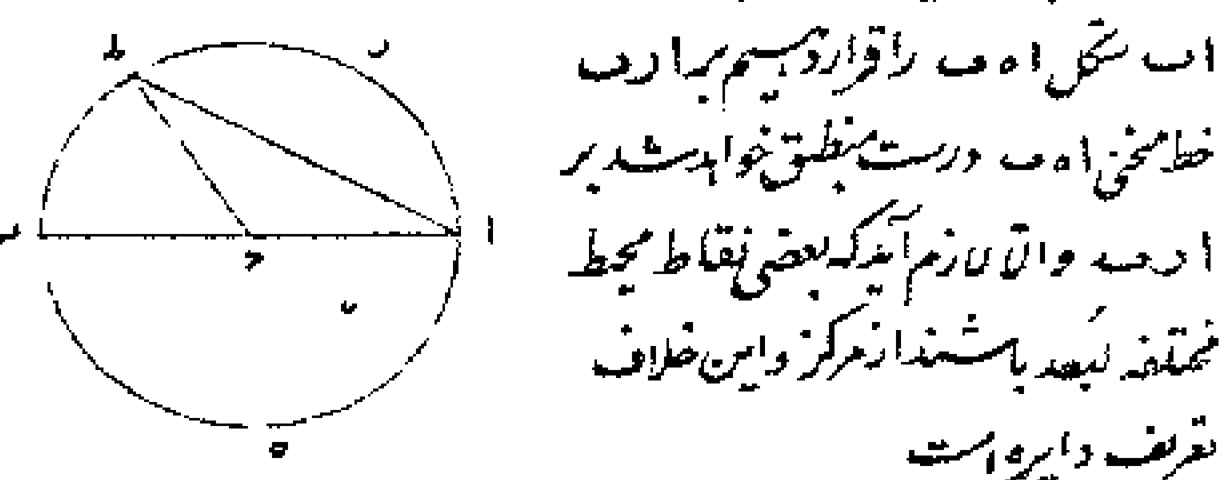
بباید بر نقطۀ اول منطبق شود و پس اگر منحنی مسدود باشد و قاطع بیش از دو نقطه با او ملاقات نکند مثل دایره ظاهر است که چون آن دو نقطه فصل مشترک در یک نقطه جمع شوند آن خط قاطع با منحنی در نقطۀ بیش مشترک نباشند و آن وقت میتوان گفت که مماس منحنی است که بر بیشتر از یک نقطه با منحنی مشترک نباشد ولی تعریف اول بجمیع انواع خطوط منحنی تعلق گیرد

۱۰- کثیر الاضلاع را محیط بر دایره گوئیم هرگاه جمیع اضلاعش دایره را مماس کند و در چنین حالت دایره را نسبت بآن محاطیه گوئیم

قضیۀ اول

در دایره هر قطر مثل اب سطح و محیطش را نصف کند

بُرهان - چون لبیل انطباق برقاعده مشترک اب شکل اه ب را قرار دهیم بر ا ر ب خط منحنی اه ب درست منطبق خواهد شد بر ا ر ب والّا لازم آید که بعضی نقاط محیط مختلف لبُعد باشند از مرکز و این خلاف تعریف دایره است



قضیۀ دوم

در دایره هر وتر اقصر است از قطر

برهان چون در شکل سابق دو شعاع ح ا و ح د را بر طرفین وتر اد وصل کنیم خط اد < اح + ح د یعنی اد < اب

فلیتجه - اطول خطی که میتوان در دایره محاط نمود قطر است

قضیهٔ سیم

هیچ خط دایره را بیش از دو نقطه قطع نکند

زیرا که اگر مثلا بر سه نقطه او را قطع میکرد این هر سه یک فاصله بود از مرکز و بموجب لازم می آمد که توانیم از نقطهٔ سه خط متساوی بخطی وصل کنیم و این را (علامت قضیه ۷ ۱۱ مقالهٔ اولست)

قضیهٔ چهارم

در یک دایره یا در دو دایرهٔ متساویه قوسهای متساویه موتر باشند باوتار متساویه
و بالعکس اوتار متساویه وتر باشند بقوسهای متساویه

مثلاً شعاع اج مساویست بشعاع ه ز و قوس ا م د = ز ن ب میگوئیم وتر ا د = ز ب

برهان - چون قطر ا ب = ز ط نصف دایره ا م د ب منطبق شود در نصف دایره ز ن ب ط و منحنی ا م د ب با تمام منطبق شود بر منحنی ز ن ب ط و چون قوس ا م د را مساوی ز ن ب فرض نموده ایم نقطه د واقع میشود بر ب و وتر ا د مساوی میشود با ز ب

حال فرض میکنیم وتر ا د = ز ب و میگوئیم قوس ا م د = ز ن ب

برهان چون دو شعاع ج د و ه ب را وصل کنیم دو مثلث ا ج د و ز ه ب اضلاع نظیر بنظیر متساوی میشوند ا ج = ز ه و ج د = ه ب و ا د = ز ب و بنابراین دو مثلث متساوی باشند و ۱۲ و پس زاویه ا ج د = ز ه ب و چون نصف دایره

ا م د ب

ا د ب را بر مساوی خود ن س ط قرار دهیم نظر بتساوی دو زاویه مذکوره شعاع ج د وق
شود بر ج ب و نقطه د بر ب پس قوس ا م د مساوی شود با ر ن ب

قضیهٔ پنجم

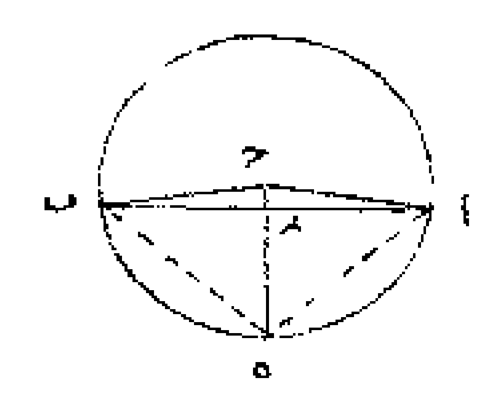
در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه هر قوس که اعظم باشد موتّر است بوتر اطول و بالعکس و وتر اطول مقابل باشد بقوس اعظم مشروط بر آنکه قوسهای مفروض کوچکتر باشند از نصف محیط

برهان در شکل سابق قوس ا ب بزرگتر است از ر ن ب و قوس ا م د را مساوی ر ن ب جدا میکنیم و دو شعاع ج د و ج ب را وصل میکنیم آنوقت دو ضلع ا ج و ج ب از مثلث ا ج ب مساویست با دو ضلع ا ج و ج د از مثلث ا ج د و زاویه ا ج ب اعظم است از ا ج د پس ضلع سیم ا ب اطول باشد از ضلع ا د یعنی ا ب > ا د و بالعکس اگر وتر ا ب اطول باشد از ر ب قوس ا م ب بزرگتر است از ر ن ب زیرا که اگر بگوئیم متساوی هستند آنوقت وتر ا ب مساوی میشود با ر ب و این خلاف فرض است و اگر بگوئیم کوچکتر است وتر ا ب کوچکتر میشود

شرح - قسی مفروضه را کوچکتر از نصف محیط گرفتیم پس اگر اعظم باشند حکم برخلاف مذکور است

قضیهٔ ششم

نصف قطر ج ه عمود بر وتر ا ب منصّف او تر است و قوس موتر ا ه ب هر دو



برهان دو شعاع ج ا و ج ب را وصل میکنیم و هر دو نسبت بعمود ج د دو مایل متساویند پس د ا و د ب متساوی البعداند از موقع عمود یعنی ا د = د ب

ثانیاً چون اه = ده و ده عمود است بر وسط اب پس و نیز هر نقطه
از این عمود متساوی البعد است از طرفین ا و ب و نقطه ه یکی از این نقاط است پس
فاصلهٔ اه = به و چون وتر اه مساوی شد با هب قوس اه مساوی می‌شود
با هب و پس شعاع ده عمود بر وتر اب نصف می‌کند قوس موتر را بر نقطه ه

شرح - خط ده مرور کرده است بر مرکز و بر وسط وتر و بر وسط قوس و عمود است
بر وتر و چون در تعیین وضع خط دو شرط از این شروط چهارگانه کافیست پس هر خطی که
دارای دو شرط باشد دو شرط دیگر را بالتبع داراست
مثلاً عمودی که اخراج شود بر وسط وتر مرور می‌کند بر مرکز و بر وسط قوس و همچنین

قضیهٔ هفتم

بر سه نقطه ا و ب و ج غیر واقعه بر یک استقامت همواره می‌توان دائره
مرور داد و بیش از یک دائره ممکن نباشد

برهان دو خط اب و بج را وصل کنید
و بر وسط آنها دو عمود دط و زح را اخراج
کنید اولاً گوییم این دو خط بر نقطه متلاقی می‌شوند
زیرا که اگر متوازی می‌بودند دو خط با و بج
که از نقطه ب عمود شده اند بر آن دو خط متوازی
می‌بایست بر یک استقامت باشند و این خلاف فرض است
پس نقطهٔ تلاقی ه از آن دو عمود چون متعلق است بعمود دط متساوی البعد است
از دو نقطه ا و ب و همان نقطه چون متعلق است بعمود زح متساوی البعد باشد
از دو نقطه ب و ج پس سه فاصلهٔ ها و هب و هج متساوی هستند و بنابراین

دایره که از مرکز ه و بنصف قطر ه ب رسم شود مرور خواهد نمود بر هر سه نقطه ا و ب و ج
حال گوئیم ممکن نیست دایره دیگر بر همان سه نقطه گذر کند زیرا که اگر چنین دایره موجود
بود مرکزش میبایست واقع باشد بر دو خط د ط و د ب و این دو خط بر یک نقطه متجاوز
متقاطع نباشند

نتیجه ۱ـ عمود وارد بر وسط او مرور نماید بر نقطه ه چونکه این نقطه متساوی البعد است
از طرفین او و پس سه عمود وارد بر اوساط اضلاع مثلث بر نقطه متقاطع شوند

۲ـ دو دایره اگر بر زیاده از دو نقطه مشارک باشند منطبق خواهند شد

قضیهٔ هشتم

دو وتر متساوی الطول متساوی البعد باشند از مرکز دایره و از
دو وتر مختلف آنکه اقصر باشد بعدش از مرکز بیشتر است

اول فرض میکنیم وتر اب = د ب و بدو عمود
ج د و ج ط آنها را نصف میکنیم و دو شعاع
ج ا و ج د را وصل میکنیم
پس دو مثلث قائم الزاویه ج ا د و ج د ط
چون وتر ج ا = ج د و ضلع اد نصف اب
= د ط نصف د ب این دو مثلث متساوی هستند (۱۹) و ضلع سیم ج د مساوی
میشود با ج ط پس معلوم شد که دو وتر متساوی اب و د ب متساوی البعدند از مرکز
ثانیاً چون وتر اح اطول است از د ب قوس ال ح اعظم است از د م ب
و از قوس ال ح قوس ان ب را مساوی د م ب جدا میکنیم و وتر اب را
وصل میکنیم و عمود ج د را بر آن وتر فرود میآوریم و عمود ج ل را بر اح حال

ظاهر است که ح د اعظم باشد از ح ه و آن اعظم از ح ل پس بطریق اولی ح د > ح ل
ولی ح د = ح ط چونکه دو وتر اب و ده متساوی هستند پس ح ط > ح ل
یعنی که از دو وتر مختلف الطول آنکه اقصر است بعید باشد از مرکز دایره

قضیهٔ نهم

عمود به مرسوم بر طرف شعاع ح ا مماس شود بر دایره

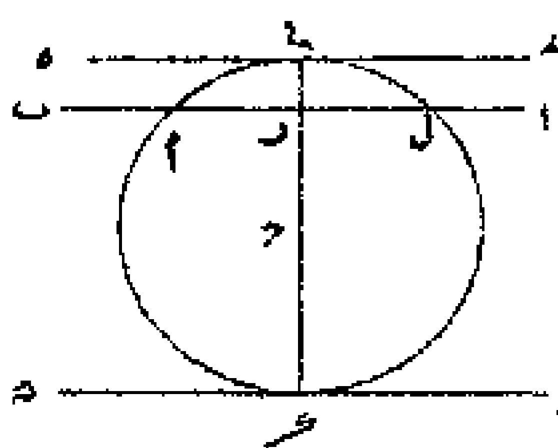
برهان هر ا ئی مثل ح د اطول است از عمود ح ا
پس نقطهٔ د خارج دایره افتد و از این قرار خط
به د بجز از نقطهٔ ا با دایره اشتراک ندارد
پس مماس دایره است و بالعکس گوییم
شعاع ح ا واصل بر نقطهٔ مماس عمود باشد بر خط مماس به د
زیرا که جمیع نقاط این خط غیر از نقطهٔ ا خارج دایره است و بنابراین شعاع ح ا اقصر خطی است
که میتوان از نقطهٔ ح بر خط به د وصل نمود پس عمود است بر آن خط
نتیجه — بر نقطهٔ ا مفروضه بر محیط نمیتوان بیش از یک خط مماس نمود

قضیهٔ دهم

دو متوازی اب و ده از محیط دایره دو قوس متساوی م ن و ل ن ل جدا کنند

این شکل سه حالت وارد اول آنکه دو متوازی قاطع دایره باشند پس شعاع ح ع را
عمود کنیم بر وتر م ل و آن عمود شود نیز بر
موازیش ن ك پس نقطهٔ ع هم بر وسط قوس
م ع ل واقع باشد و هم بر وسط قوس ن
ع ك یعنی م ع = ع ل و قوس

ن ط = ط ک پس م ط - ن ط = ط ل - ط ک یعنی م ن = ل ک

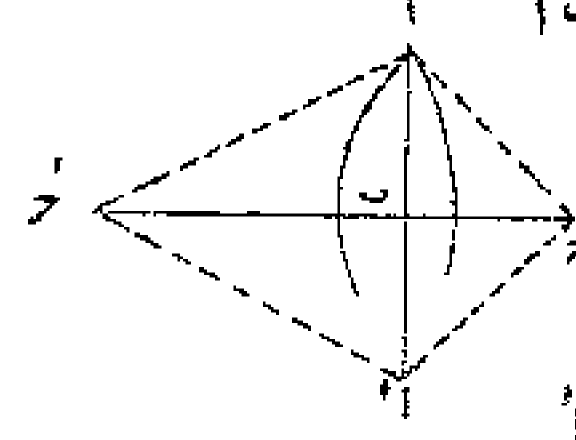


دوم آنکه از دو متوازی اب و ده یکی قاطع باشد و دیگر مماس شعاع ح ط را بر نقطهٔ تماس ط وصل میکنیم و آن عمود شود بر مماس ده و نیز بر موازیش م ل پس نقطهٔ ط واقع باشد بر وسط قوس م ط ل یعنی دو قوس م ط و ط ل واقع مابین دو متوازی متساوی باشند

سیم آنکه دو متوازی مماس دایره باشند یکی ده بر نقطهٔ ط و دیگر وطن بر نقطهٔ ک پس خط قاطع موازات آنها رسم کنیم مثل اب آنوقت بنابر آنچه ذکر شده م ط = ط ل و م ک = ک ل پس تمام قوس ط م ک = ط ل ک و باید ملتفت بود که هر کدام نصف محیط است

قضیهٔ یازدهم

هرگاه دو دایره مشارک باشند در نقطهٔ ا واقعه در خارج خط ح حُ واصل ما بین مرکزین آنها پس مشارک میشوند در نقطهٔ دیگر اُ واقعه بر عمود اب که وارد شده باشد بر ح حُ و فاصلهٔ این نقطهٔ دوم از خط المرکزین برابر باشد با فاصلهٔ نقطهٔ اولی ا



برهان - اُب را مساوی اب جدا میکنیم پس دو ذیل ح ا و ح اُ چون متساوی البعد اند از موقع عمود ح ب متساوی باشند پس اُ مرسومه از مرکز ح و بشعاع ح ا مرور کند بنقطهٔ اُ

و همچنین دایره مرسومه از مرکز ح' و بشعاع ح' ا مرور کند بر ا'

نتیجه ۱ - دو دایره چون متقاطع شوند خط واصل بین المرکزین عمود باشد بر وسط وتر مشترک

نتیجه ۲ - دو دایره چون مماس بهمدیگر شوند نقطه تماس واقع شود بر خط المرکزین والا لازم آید که دو دایره در نقطه دیگر مشارک باشند و در اینصورت متقاطع میشدند نه مماس

دو دایره را چون نسبت بهمدیگر بسنجیم صاحب پنج وضع مختلف توانند بود متخارج متداخل متماس داخل متماس خارج متقاطع

قضیهٔ دوازدهم

در دو دایره متخارج بعد المرکزین اعظم است از مجموع دو شعاع

زیرا که چون ح ح' = ح ا + ح' ا' + ا ا'

پس ح ح' > ح ا + ح' ا'

قضیهٔ سیزدهم

در دو دایره متداخل بعد المرکزین اصغر است از مجموع دو شعاع

زیرا که چون ح ح' = ح ا - ح' ا' - ا ا' پس

ح ح' < ح ا - ح' ا'

قضیهٔ چهاردهم

در دو دایره که مماس خارج باشند بهمدیگر بعد المرکزین مساویست بمجموع دو شعاع

زیرا که چون نقطه تماس آ واقع است
بر خط المرکزین
پس ب ج = ب ا + ا ج

قضیهٔ پانزدهم

در دو دایره که مماس داخل باشند بعد المرکزین مساوی است بتفاضل دو شعاع

زیرا که چون نقطه تماس واقع است بر خط المرکزین
پس ج ب = ج ا − ب ا

قضیهٔ شانزدهم

در دو دایرهٔ متقاطعه بعد المرکزین اصغر است از مجموع دو شعاع و اعظم از تفاضل انها

برهان دو مرکز را وصل میکنیم بنقطه فصل مشترک ا تا مثلثی ترکیب شود که اضلاعش یکی خط المرکزین ج ج' باشد و دیگر دو شعاع ج ا و ج' ا و ثانی

مبرهن شده که در مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر و اطول از تفاضل آنها
عکس این شکل مذکور نیز صحیح است و بهمان وجه مبرهن شود مثلا اگر بعد المرکزین اقصر
باشد از مجموع دو شعاع و اطول از تفاضل آنها دو دایره متقاطع شوند زیرا که اگر
متخارج یا متداخل بودند بعد المرکزین اعظم بشد از مجموع آنها یا اصغر از تفاضل آنها

و اگر مماس همدیگر بوند بعد المرکزین مساوی میشد بمجموع دو شعاع یا بتفاضل آنها

قضیهٔ هفدهم

در یک دایره یا در دو دایرهٔ متساویه هرگاه دو زاویه مرکزیه اح ب و دح ه متساوی باشند دو قوس اب و ده مقابل بآنها متساوی هستند و بالعکس اگر دو قوس اب و ده متساوی باشند دو زاویه مرکزیه اح ب و دح ه مساوی میشوند

مبرهنا اولاً اگر دو زاویه متساوی باشند و یکی را بر دیگری قرار دهیم درست منطبق شوند و چون اضلاع آنها متساویست نقطهٔ ا واقع شود بر د و نقطه ب بر ه و آنوقت قوس اب باید واقع شود بر ده والا نقاطی پیدا میشد مختلفة البعد از مرکز پس اب = ده

ثانیاً اگر قوس اب مساوی باشد با ده دو زاویه مقابله متساوی میشوند زیرا که اگر چنین نباشد و مثلاً اح ب اعظم باشد زاویه اح ز را مساوی دح ه جدا میکنیم آنوقت قوس از = ده و بفرض اب = ده پس از = اب یعنی جزو مساویست با کل و این خلاف است پس اح ب = دح ه

قضیهٔ هیجدهم

در یک دایره یا دو دایرهٔ متساویه نسبت مابین دو زاویه مرکزیه مثل نسبت دو قوس واقع مابین اضلاع آنها است

دو زاویه مرکزیه دو دایره متساویه اح ب است و دح ه و اول فرض میکنیم که دو قو

اب و ده مقیاس مشترکی داشته باشند و آن ۷ مرتبه در اب بگنجد و ۴ مرتبه در ده و از اینقرار نسبت اب به ده این باشد $\frac{۷}{۴}$

حال نقاط تقسیم دو قوس را بدو مرکز وصل میکنیم آنوقت زاویه اجب به هفت جزء متساوی قسمت شود و چونکه قوس مقابله آنها متساوی هستند و زاویه دحه چهار از آن جزء را شامل است پس نسبت آندو زاویه مثل ۷ است به ۴

و اگر دو قوس اب و ده متباین باشند قوس ده را به سه جزو مثلاً قسمت میکنیم و فرض میکنیم اب چهار از این اجزا را شامل شود و قوس لب کوچکتر از یک جزو باقی ماند درینصورت نسبت اب به ده اعظم باشد از $\frac{۴}{۳}$ و اصغر از $\frac{۵}{۳}$

و چون دو مرکز را بنقاط تقسیم وصل کنیم زاویه دحه به سه جزو متساوی قسمت شود و زاویه اجب چهار از این اجزا را شامل شود و باقی میماند کسر لجب که کوچکتر از یک جزو است پس نسبت آندو زاویه نیز واقع باشد ما بین $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۵}{۳}$ پس دو نسبت اجب : دحه و اب : ده هر کدام ۴ مرتبه شامل شدند کسر $\frac{۱}{۳}$ را و بهمین وجه ثابت میکنیم که هر دو دیگر نسبتها شامل میشوند $\frac{۱}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۰۰}$ و $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ و ...... را و بطور کلی جزو تامی از واحد را که هر قدر بخواهیم کوچک باشد پس آن دو نسبت متساوی باشند

در تقدیر زوایا و مقیاس آنها

تقدیر نمودن هر شیء عبارت از نسبت که معلوم کنیم نسبت آن شیء را بواحد نوع خود
واز همین قرار تقدیر نمودن زاویه عبارت است از اینکه بسنجیم آنرا از زاویه قائمه که واحد
فرض شده و نسبتش را معلوم کنیم

و بنابر شکل مذکور عوض اینکه نسبت مابین دو زاویه مرکزیه بدست آوریم میتوانیم
معلوم کرد نسبت دو قوس واقع مابین اضلاع آنهارا مثلا عوض اینکه زاویه را با قائمه
بسنجیم قوس مقابلش را بربع محیط نسبت کنیم و از اینجا است که بطریق اختصار گوئیم
اندازه و مقیاس زاویه مرکزیه قوس مقابل اوست

و من باب تسهیل مقایسه محیط دایره را بر ۳۶۰ جزو متساوی قسمت کنیم و هر
کدام را درجه گوئیم و درجه را بر ۶۰ دقیقه و آنرا بر ۶۰ ثانیه و هکذا
پس اگر قوس واقع مابین ضلعین زاویه مرکزیه ۲۴ درجه باشد مقیاس زاویه چنین است
$\frac{۲۴}{۹۰}$ یا $\frac{۴}{۱۵}$

شرح - چون دلیل مذکور را در قطاع تکرار کنیم ثابت میشود که در دو دایره متساویه
نسبت دو قطاع بهمدیگر مثل نسبت مابین دو قوس مقابل با آنهاست

قضیهٔ نوزدهم

مقیاس زاویهٔ محیطیه ب ا ج نصف قوس ب ج واقع مابین ضلعین است

ثبوتها اول فرض میکنیم که مرکز دایره در زاویه
مفروضه واقع شود و قطر ا ه را وصل میکنیم با دو شعاع
د ب و د ج آنوقت زاویه ب د ه خارج
مثلث ا ب د مساوی شود با مجموع دو زاویه داخلی
د ا ب و ا ب د (۲۵) و مثلث ب د ا متساوی

الساقین است و زاویه ج ا ب = ا ب ج پس زاویه ب ج ه مضاعف زاویه ب ا ج
باشد و مقیاس زاویه مرکزیه ب ج ه قوس ب ه باشد پس مقیاس زاویه ب ا ج
نصف قوس ب ه باشد و بهمان دلیل مقیاس ج ا د نصف قوس ه د باشد پس مقیاس

ب ا ج + ج ا د = نصف ب ه + نصف ه د = نصف ب د

دوم فرض میکنیم که مرکز ج واقع شود در خارج زاویه ب ا د و قطر ا ه را وصل میکنیم پس
مقیاس زاویه ب ا ه نصف قوس ب ه باشد و مقیاس زاویه د ا ه نصف د ه
پس مقیاس تفاضل ب ا د نصف ب ه - نصف ه د باشد یعنی نصف ب د

پس مقیاس هر زاویه محیطیه نصف قوس مقابل اوست

نتیجهٔ ۱ جمیع زوایای ب ا ج و ب د ج وغیره
محاطیه در یک قطعه دایره متساوی باشند چونکه
مقیاس هر کدام نصف قوس ب و ج است

نتیجهٔ ۲ زاویه ب ا د محاطیه در نصف دایره قائمه است چونکه مقیاسش نصف نیم
دایره ب ه د است یعنی ربع محیط و چون این
نتیجه معتبر است بوجهی مستقل آنرا مبرهن سازیم
پس شعاع ا ج را وصل کنیم آنوقت مثلث
ب ا ج متساوی الساقین باشد و زاویهٔ
ب ا ج = ا ب ج و همچنین مثلث ج ا د و زاویهٔ ج ا د = ا د ج پس ب ا ج + ج ا د یعنی
ب ا د = ا ب د + ا د ب و چون مجموع دو زاویه ب و د مثلث ا ب د مساوی
شد با زاویه قائمه ب ا د و دلیل است بر آنکه مجموع سه زاویه‌اش مساوی باشد با دو
برابر زاویه ب ا د و از خارج میدانیم که آن مجموع دو قائمه است پس زاویه ب ا د

یک قائمه است

نتیجه ۳ - هر زاویه مثل ب ا د (شکل نتیجه اول) که محاط باشد در قطعه بزرگتر از نصف محیط ما و حاده است زیرا که مقیاسش نصف قوس ب د ه باشد و این قوس اصغر است از نصف محیط و هر زاویه مثل ب د ح که محاط باشد در قطعه کوچکتر از نصف محیط منفرجه است چونکه مقیاسش نصف قوس ب ا ح باشد و این قوس اعظم است از نصف محیط

قضیه بیستم

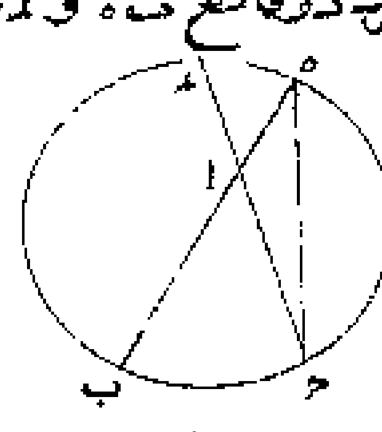
مقیاس زاویه ب ا د حادثه مابین ظل و وتر نصف قوس ا م د واقع مابین دو ضلع از زاویه است

برهان برنقطه تماس قطر ا د را رسم کنید پس زاویه ب ا د قائمه باشد و مقیاسش نصف محیط ا م د است و مقیاس زاویه د ا د نصف قوس د د است پس مقیاس ب ا د + د ا د یا ب ا د نصف ا م د است + نصف د د یعنی نصف قوس ا م د

و به همچنین ثابت میکنیم که مقیاس زاویه ح ا ه نصف قوس ا د واقع مابین ضلعین او است

قضیه بیست و یکم

مقیاس زاویه ب ا د حادثه بر نقطه فصل مشترک دو قاطع د ه و د ح که راسش در درون دایره است مساویست به



نصف قوس واقع مابین ضلعینش باضافه نصف قوس واقع مابین استقامت دو ضلع

برهان زاویه ب ا د خارج مثلث ا ه ح

مساویست بمجموع دو زاویهٔ ا ه ج و ا ج ه و مقیاس این دو زاویه نصف دو قوس ب ه و د ه است

قضیهٔ بیست و دوم

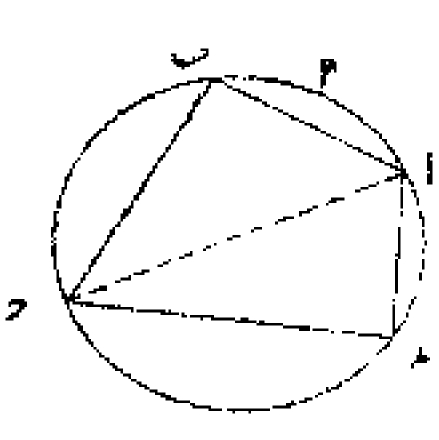
مقیاس زاویهٔ ب ا ه حادثه ما بین دو قاطع ا ب و ا ج که راسش در خارج دایره است مساویست با نصف قوس مقعر ب ج منهای نصف قوس محدب د ه

برهان زاویهٔ ا مساویست بتفاضل دو زاویهٔ ب د ج و ا ب د و مقیاس زاویهٔ اول نصف ب ج است و مقیاس دویم نصف د ه

حکم مذکور کلی است اگرچه یکی از دو ضلع زاویه یا هر دو ضلع مماس دایره باشند و دلیل همانست که ذکر شد

نتیجه — قوس ب ا ج (شکل نتیجهٔ اول ش ۱۹) مکان هندسی رؤس زوایائی است که مساوی باشند با ج د ب و اضلاعشان مرور کنند بر دو نقطهٔ ج و ب زیرا که جمیع زوایای محاطیه در قطعهٔ ج ا ب مساوی هستند با ج د ب و از دو قضیهٔ سابقهٔ مذکوره چنین نتیجه شد که هر زاویه که ضلعینش مرور کنند بر ج و ب و راسش واقع نباشد بر قوس ج ا ب مساوی نیست با زاویهٔ ج د ب

قضیهٔ بیست و سیم



در هر ذوات اربعة الاضلاع محاطی مثل ا ب ج د هر دو زاویهٔ متقابل تمام همدیگر باشند تا دو قائمه

زیرا که مقیاس مجموع دو زاویهٔ ا د ج و ا ب ج نصف محیط ا ب ج د ا و بالعکس اگر در ذوات اربعة الاضلاعی

دو زاویه مقابل اب د و اه د تمام همدیگر باشند از شکل ثلثین مجرا ثابت شدن در دایره ثابت
برهان چون دایره بر سه نقطه ا و د و ح مرور دهیم مقیاس زاویه اه د نصف قوس اح
میشود پس مقیاس زاویه اب د که تمام اوست نصف قوس باقی اه د باشد یعنی از زاویه
مساویست با زوایای محیطیه در قطعه اه د و این تساوی متحقق نشود جز آنوقت که نقطه
واقع باشد بر قوس ام د فهو المطلوب

مسائل متعلقه بدو مقاله اول

مسئله اول

میخواهیم خط اب را بدو جزو متساوی تقسیم کنیم
از دو مرکز ا و ب و بشعاعی اطول از نصف اب دو
قوس رسم کنید تا متقاطع شوند بر نقطه د این نقطه متساوی البعد است از طرفین ا و ب
و بهمین وجه نقطه دیگر ه را در فوق یا تحت اب بدست آورید و آن نیز متساوی البعد است
از همان طرفین و دو نقطه د و ه را بخط ده وصل کنید آن خط مفروض را بر نقطه ح نصف کند
برهان دو نقطه د و ه متساوی البعد اند از طرفین ا و ب پس باید واقع شوند بر عمود
وارد بر وسط اب و بر دو نقطه بیش از یک خط نتوان مرور داد پس ده همان عمود است
و اب را بر ح نصف کند

مسئله دوم

میخواهیم از نقطه ا مفروضه بر خط ب ج عمودی
بر آن خط اخراج کنیم
دو نقطه ب و ج را در طرفین ا بیک مسافت گیرید
و از مرکز این دو نقطه و بشعاعی اطول از ب ا دو قوس رسم کنید تا بر نقطه د متقاطع شوند و خط

اه را وصل کنید که عمود مطلوب است

برهان نقطهٔ د چون متساوی البعد است از طرفین ب و ج متعلق باشد بعمود واقع بر وسط ب ج پس اد همان عمود است

تبصره - هرگاه بخواهیم بر نقطهٔ ا از خط ب ج زاویهٔ قائمهٔ ب اد رسم کنیم باید بوجه مذکور بعینه استعمال نمائیم

مسئلهٔ سیم

میخواهیم از نقطهٔ ا مفروضه در خارج خط ب د عمودی بر این خط وارد آوریم

از مرکز ا و بشعاع مناسبی قوسی رسم کنید تا خط ب د را بر دو نقطهٔ ب و د قطع کند و بعد بطریق مسئلهٔ اول نقطهٔ مثل ه بدست آورید که متساوی البعد باشد از طرفین ب و د یعنی این دو نقطه را مرکز نموده دو قوس بیک شعاع رسم کنید تا متقاطع شوند بر ه و خط اه را وصل کنید که عمود مطلوب است

برهان دو نقطهٔ ا و ه متساوی البعد اند از طرفین ب و د پس متعلق اند بعمود اه که بر وسط ب د اخراج شود

مسئلهٔ چهارم

میخواهیم بر نقطهٔ ا از خط اب زاویهٔ مساوی با زاویهٔ مفروضهٔ ک رسم کنیم

از مرکز ک و بشعاع مناسب قوس م ل را رسم کنید و منتهی نمایندش به دو ضلع زاویه و از مرکز ا و بشعاع اد = ک م قوس غیر معین ب ه را رسم کنید و بعد بشعاعی برابر وتر

م ل و از مرکز ب قوسی رسم کنید تا قوس غیر محدود ب ه را بر نقطه ء قطع کند و خط اء را وصل نمایید که زاویه ء ا ب مساوی باشد بزاویه مفروضه ل

برهان دو قوس ب ه ء و م ل چون از دو دایره متساویه اند و صاحب دو وتر متساوی متساوی باشند (ق ۲۰) و زاویه ب ا ء = م ك ل

مسئله پنجم

میخواهیم زاویه مفروضه یا قوس مفروضه ا ب را بر دو جزو متساوی قسمت کنیم

اولا اگر بخواهیم قوس ا ب را نصف کنیم از دو مرکز ا و ب و بشعاعی مناسب دو قوس رسم میکنیم تا بر نقطه ء متقاطع شوند خط ج ء را وصل میکنیم و آن قوس ا ب را نصف کند بر نقطه ه

برهان هر کدام از دو نقطه ج و ء متساوی البعد اند از طرفین ا و ب از (ق [illegible]) پس خط ج ء عمود باشد بر وسط این وتر پس نصف کند قوس ا ب را بر نقطه ه (ق [illegible])

ثانیا اگر بخواهیم زاویه ا ج ب را نصف کنیم اول از مرکز ج قوس ا ب را رسم کنیم و بعد عمل مذکور را جاری کنیم

شرح - میتوان بهمین عمل هر یک از دو نصف ا ه و ه ب را نصف کرد و بنابراین میتوان تقسیمات متتالیه زاویه یا قوسی از ربع و ثمن و نصف ثمن و غیره

مسئله ششم

میخواهیم بر نقطه ا خطی بموازات ب ء رسم کنیم

از مرکز ا و بشعاعی مناسب قوس ه ء را رسم کنید و از مرکز ه و با همان شعاع قوس

از را و بعد ه د را مساوی از جدا کنید و اد را وصل نمایید که موازی مطلوبست

برهان چون اه را وصل کنید دو زاویهٔ متبادله داخله اه د و ه ا د متساوی میشوند

پس دو خط اد و ه ر متوازی باشند (ش ۲۷ د ا)

این مسئله را بیشتر با آلت گونیا حل کنیم و آن مثلث

قائم الزاویه است ح د ه پس وترش را قرار دهیم

بر خط ح د که میخواهیم موازاتش به نقطه ا خطی برود

و بسیم و ستاره یا مثل ح م را بر قاعده ح ه

اش تکیه دهیم و گونیا را در طول ستاره بلغزانیم تا

وترش به نقطه ا گذرد و خط ح مُ را رسم کنیم و آن

موازی باشد با ح د چونکه دو زاویهٔ متقابله د ح م و ا حُ م متساوی هستند ۳

مسئلهٔ هشتم

از مثلثی دو ضلع ب و ج و زاویهٔ بینهما ا پس معلوم است میخواهیم مثلث را رسم کنیم

خط د ه را در نقطهٔ د رسم کنید و زاویهٔ ه د ر

را مساوی ا ترتیب دهید و د ط را مساوی

ب جدا کنید د ی را مساوی ج و ط ی

را وصل کنید و د ط ی مثلث مطلوبست

مسئلهٔ نهم

یک ضلع و دو زاویهٔ مثلثی معلوم است میخواهیم مثلث را رسم کنیم

دو زاویهٔ معروضه یا هر دو مجاور ضلع معلوم و یا یکی مجاور و دیگری مقابل پس

اگر چنین باشد زاویهٔ سیم را به تصور مسئلهٔ ۶ معلوم کنیم و آنوقت دو زاویهٔ مجاور در

وست است پس خط ده را مساوی ضلع معلوم رسم کنیم
و بر نقطه د رسم کنیم زاویه
ه د ر را مساوی یکی از دو زاویه مجاور ده و بر نقطه
ه زاویه د ه ط را مساوی زاویه دیگر پس دو ضلع
د ر و ه ط بر نقطه ع متقاطع شوند و د ه ع مثلث مطلوب است

مسئله دهم

سه ضلع ا و ب و ح از مثلثی معلوم است میخواهیم آن مثلث را رسم کنیم
ده را مساوی ضلع ا رسم میکنیم و از مرکز د و
بشعاعی مساوی ضلع دوم ب قوس رسم میکنیم
و از مرکز ه و بشعاعی مساوی ح قوس دیگر این
دو قوس نقطه و متقاطع شوند و دو خط د و و
ه و را رسم میکنیم ده و مثلث مطلوب است
نتیجه شرط امکان عمل آنست که دو قوس مرسوم از دو مرکز ه و د بر نقطه متقاطع شوند
پس باید ضلع ده اقصر باشد از مجموع دو ضلع دیگر و اطول از تفاضل آنها ع ۲ و ۲

مسئله یازدهم

دو ضلع ا و ب و زاویه ح مقابل بضلع ب از مثلثی معلوم است میخواهیم
آن مثلث را رسم کنیم
این مسئله دو حالت دارد اول آنکه زاویه ح
قائمه یا منفرجه باشد پس زاویه ه د ر را مساوی
ح رسم میکنیم و ده را مساوی ا جدا

میکنیم و از مرکز ه و بشعاعی مساوی ب قوسی رسم میکنیم تا خط د ر را بر نقطه د قطع کند و ه د را وصل میکنیم د ه د مثلث مطلوب میشود

در حالت مذکور باید ضلع ب اطول باشد از ا چونکه زاویه قائمه یا منفرجه ج اعظم است از سایر زوایای مثلث و ب ضلع مقابلش باید اطول باشد

حالت دویم آنست که زاویه ج حاده باشد پس اگر ضلع ب اطول باشد از ا عمل مذکور را بجا می‌آوریم و د ه د مثلث مطلوب میشود

ولی اگر زاویه ج حاده باشد و ضلع ب اقصر از ا قوس مرسوم از مرکز ه و بشعاع ه د = ب قطع کند ضلع د ر را بر دو نقطه د و ط که هر دو در یک سمت د واقع شده اند پس حادث شود دو مثلث د ه د و د ه ط که هر دو در مسئله صدق کنند

شرح - ضلع ب اگر اقصر شد از عمودی که از ه بر د ر فرود آید مسئله در هیچ حالت جواب ندا شت

مسئلهٔ ۱۱ یازدهم

در متوازی الاضلاعی دو ضلع مجاور ا و ب و زاویه بینهما ج مساویست میخواهیم آن شکل را رسم کنیم

خط د ه را مساوی ا رسم میکنیم و بر نقطه د زاویه ر د ه را مساوی ج و خط د ر را مساوی ب جدا میکنیم و دو قوس رسم میکنیم

یکی از مرکز ر و بشعاع ب ج = ده و دیگر از مرکز ه و بشعاع ه ج مساوی ده این دو قوس
بر نقطه ج متقاطع شوند و ب ج و ه ج را وصل کنیم پس ده ج ب متوازی الاضلاع مطلوب
بنما - بر وفق عمل مذکور هر دو ضلع متقابل متساوی باشند و بنابراین شکل مرسوم متوازی
الاضلاع است ق ۳۴ و ۱ و مرکب است از دو ضلع و زاویه مفروض

نتیجه - اگر زاویه مفروضه قائمه باشد شکل مربع مستطیل شود و اگر علاوه بر آن دو ضلع
معلوم متساوی باشند آن شکل مربع شود

مسئله سیزدهم

میخواهیم مرکز دایره مفروضه یا قوس مفروضی را مشخص کنیم

بر محیط دایره یا قوس مفروض نقطه ا و ب و ج
را نشان میکنیم و دو خط ا ب و ب ج را ما بین آنها
وصل میکنیم و بر دو عمود ده و زط هر دو را نصف میکنیم پس نقطه ه فصل مشترک این دو
عمود مرکز مطلوب است

شرح هرگاه بخواهیم بر سه نقطه ا و ب و ج دایره کشیم یا بر مثلث ا ب ج دایره
محیط کنیم باید عمل مذکور را بعینه مجری داشت

مسئله چهاردهم

میخواهیم بر نقطه معینه خطی مرور دهیم که
مماس شود بر دایره مفروضه

این مسئله دو حالت دارد نقطه مفروضه اگر بر محیط
باشد مثل ا شعاع ه ا را وصل میکنیم و ا د را عمود

میکنیم و آن مماس مطلوب است (۲،۹)

و اگر نقطهٔ ا خارج دایره باشد بین آن نقطه و مرکز دایره را بخط ح ا وصل میکنیم و آن را
بر نقطهٔ ه نصف میکنیم و از مرکز ه و بشعاع ه ح دایره رسم میکنیم تا محیط مفروض را
بر نقطهٔ ب قطع کند و خط ا ب را وصل میکنیم که مماس مطلوب است

برهان: چون ح ب را وصل کنیم زاویهٔ ح ب ا محاطیه در نصف دایره قائمه باشد
(۱۱،۳) و بنابراین ا ب عمود باشد بر طرف شعاع ح ب یعنی مماس دایره باشد

شرح - نقطهٔ ا چون در خارج دایره واقع است از آن دو مماس متساوی میتوان بر دایره
رسم نمود یکی ا ب است و دیگری ا ه زیرا که در دو مثلث قائم الزاویهٔ ح ب ا و ح ه ا
چون ح ا مشترک است و ضلع ح ب = ح ه این دو مثلث متساوی باشند (۱۹،۱)
پس ا ه = ا ب و نیز زاویهٔ ح ا ه = ح ا ب

مسئلهٔ پانزدهم

میخواهیم در مثلث ا ب ج دایرهٔ محاط کنیم
بر دو زاویهٔ ا و ب دو خط منصف الزاویه
ا ح و ب ح را مرور دهید این دو خط متقاطع
شوند بر نقطهٔ ح و این نقطه متساوی البعد باشد از سه ضلع ا ب و ا ج و ب ج
اگر از آن نقطه سه عمود ح د و ح ه و ح ر را بر اضلاع مثلث فرود آوریم متساوی شوند
و دایره که از این نقطه و بشعاع ح د رسم شود مماس باشد بر سه ضلع

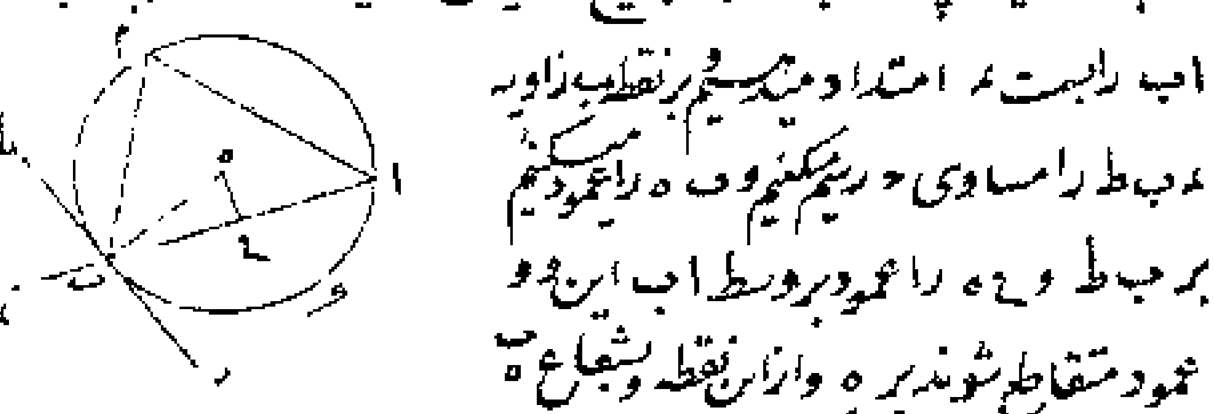
تنبیه ۱ - نقطهٔ ح بیک فاصله است از دو ضلع ب ج و ا ج و متعلق باشد بخط
منصف الزاویهٔ ج پس سه خط منصف الزوایای مثلث بر نقطهٔ متقاطع شوند

تنبیه ۲ - چون دو زاویهٔ خارجیهٔ م ب ج و ب ج ن را بدو خط منصف کنیم

آن دو خط بر ه متقاطع شوند و این نقطه مرکز
دایره است که مماس شود بر ضلع ب ج و
بر استقامت د و ضلع دیگر همچنین و نقطه
هٔ و هٔ مرکز دو دایره باشند که مماس شوند
بر یکی از اضلاع مثلث و بر استقامت دو
ضلع دیگر پس معلوم میشود که بر سه خط مفروض چهار دایره میتوان مماس نمود

مسئلهٔ شانزدهم

میخواهیم بر خط ا ب قطعه دایره رسم کنیم که قابل احتوای زاویه مفروضه
ج باشد یعنی چنان باشد که جمیع زوایای محاطیه اش مساوی با زاویه ج باشند



ا ب را بسمت د امتداد میدهیم بر نقطه ب زاویه
د ب ط را مساوی ج رسم میکنیم و ب ه را عمود میکنیم
بر ب ط و ج ه را عمود بر وسط ا ب این دو
عمود متقاطع شوند بر ه و از این نقطه و بشعاع ه ب
دایره رسم کنیم و قطعه مطلوبه ا م ب است
برهان چون ب د عمود است بر طرف شعاع
ه ب مماس دایره باشد و مقیاس زاویه
ا ب د نصف قوس ا ک ب هست (۲۴۵ و ۲) و
مقیاس زاویه محیطیه ا م ب نیز نصف قوس ا ک ب است پس زاویه ا م ب = ا ب د
= ط ب ع = ج پس جمیع زوایای محاطیه در قطعه ا م ب مساوی باشند بزاویه مفروضه ج
شرح - اگر زاویه مفروضه قائمه بود قطعه مطلوبه نصف دایره میشد مرسومه بر قطر ا ب

مسئلۂ نهم

میخواهیم بر دو دایره خطی مماس مشترک رسم کنیم

اول فرض میکنیم مسئله حل شده باشد و اا′ مماس مشترک خارج باشد بر دو دایره و دو شعاع ح ا و ح′ ا′ را بر دو نقطهٔ مماس وصل میکنیم و خط ح′ ب را موازی با اا′ پس دو شعاع ح ا و ح′ ا′ چون عمود اند بر اا′ عمود باشند بر ح′ ب پس خط ثانی مماس شود بر دایره که از مرکز ح رسم شود بشعاع ح ب = ح ا - ح′ ا′ پس از این تفصیل دستور العمل ذیل استنباط شود

از مرکز ح و بشعاعی مساوی بتفاضل ح ا - ح′ ا′ دایره رسم کنید و از نقطهٔ ح′ خطی بر این دایره مماس کشید و چون نقطهٔ ب بدست آمد خط ح ب ا را رسم کنید و ح′ ا′ را بموازات ح ا و خط اا′ را اخراج نمائید که مماس مطلوب است

از دستور العمل مذکور چنین استنباط میشود که مسئله صاحب دو جواب است چونکه از نقطهٔ ح′ دو خط مماس میتوان بر دایره مرور داد و شرط امکان مسئله اینست که ح ح′ ≥ ح ا - ح′ ا′ و بعبارت اخری اینست که دو محیط متداخل نباشند و الا جواب ندارد

حال میخواهیم خطی مماس مشترک بر دو دایره رسم کنیم دو شعاع آنها ح ا است و ح′ م و خط ا م مماس مطلوب باشد پس دو نقطهٔ تماس دو شعاع ح ا و ح′ م را وصل میکنیم و خط ح′ ب را بموازات

ام حال چون ام عمود است بر دو شعاع ه ا و ذم خط ذ ب نیز عمود باشد بر
همان دو خط و بنابراین مماس شود بر دایره که از مرکز ه رسم شود بشعاع ه ب = ه ا
+ اب = ه ا + ذم

و دستور العمل این شد که از مرکز ه و بشعاعی مساوی مجموع دو شعاع
دو دایره مفروضه دایره رسم کنیم و از نقطه ذ خط ذ ب را بر آن مماس کنیم و باقی
عمل را بطریق مذکور جاری نمائیم

این مسئله نیز صاحب دو جواب است ولی شرط امکانش این است که ه ذ ≥ ه ا + ذم
یعنی متخارجه باشند یا مماس خارج

مسئلهٔ هجدهم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک ما بین دو خط اب و ح د معلوم
کنیم و بعد نسبت عددی آنها را

ا ط ب

ح ع د

بزرگتر مقسوم علیه مشترک این دو خط
ممکن نیست از خط اقصر ح د متجاوز کند

ولی این خط اگر برات صحاح در خط اطول اب بگنجد در اینصورت خود بزرگتر مقسوم علیه
مشترک مطلوب است پس از ابراب نقل میکنیم و فرض میکنیم اب = ۲ ح د
+ ط ب و میگوئیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک ما بین اب و ح د بعینه همانست
که موجود باشد ما بین دو خط ح د و ط ب

زیرا که هر مقسوم علیهی که مشترک باشد ما بین اب و ح د چون عاد میکند ح د را
عاد کند اط را و چون عاد میکند اب را عاد کند درست باقی ط ب پس
مقسوم علیه مشترک باشد ما بین اب و ح د

وازاینقرار جمیع مقسوم علیه‌های مشترک مابین اب و ج د بعینها همانهاست که یافت شود مابین ج د و ط ب پس بزرگترآنها نیز یکی باشد

حال ط ب را بر ج د نقل میکنیم و فرض میکنیم ج د = ط ب + ك د و بطریق مذکور ثابت میکنیم که بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین ج د و ط ب همانست که یافت شود مابین ط ب و ك د

حال ك د را بر ط ب نقل میکنیم و فرض میکنیم ط ب = ٢ ك د و خط ك د بزرگتر مقسوم علیه مشترک باشد مابین اب و ج د

وازتساویهای سابق این دو تساوی نتیجه شود

ج د = ٣ ك د
ا ب = ٨ ك د

پس نسبت اب بر ج د بقدر [illegible] است

تنبیه - در آخر عمل چنین فرض کردیم که سلسلهٔ اعمال منتهی شود بباقی صفر و حال میخواهیم ثابت کنیم که اگر دو خط صاحب مقیاس مشترک باشند فرض صحیح است والا اگر اصم باشند بصفر نمیرسیم ولی باقی ماندها متدرجاً کوچکتر میشوند تا هر حدیکه خواسته باشیم

چون فرض میکنیم ج و د دو خط مفروض باشد و ب۱، ب۲، ب۳، ب۴ ... باقی ماندهای متتالی باشند و ح۱، ح۲، ح۳، ح۴، ح۵ ... خارج قسمتها پس این تساوی حاصل شود

ج = د ح۱ + ب۱
د = ب۱ ح۲ + ب۲
ب۱ = ب۲ ح۳ + ب۳
ب۲ = ب۳ ح۴ + ب۴

....
....

باقی ب۲ کوچکتر است از ج/۲ زیراکه د اگر بیش از یکمرتبه در ج نگنجد بزرگتر باشد از

ج‌ح پس آن باقی کوچکتر باشد از ج‌ه واگر چندین مرتبه در ح نیز حکم مذکور بطریق اولی صحیح باشد
و بهمان دلیل این چند نامساوی حاصل شود

ب‌ج < ج‌ه و بنابراین ب‌ج < ج‌ح

ب‌ه < ج‌ه و بنابراین ب‌ه < ج‌ح

ب‌ح < ج‌ح و بنابراین ب‌ح < ج‌ع

و همچنین در ما بقی

پس معلوم شد که اگر رشته عمل را بی اندازه ممتد کنیم باقی مانده‌ها از قدر کوچکتر میشوند که بخواهیم آن
و بنابراین اگر مقسوم علیه مشترکی در میان باشد البته بباقی مانده صفر خواهیم رسید والا لازم آید
که باقی مانده‌ای پیدا شود کوچکتر از مقسوم علیه مشترک و این حکم بنابر قضیه مذکوره باطل است

مسئله نوزدهم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین دو زاویه ا و ب را اگر داشته باشد معلوم کنیم و بعد از آن نسبت عددی آنها را

از دو مرکز ا و ب و بیک شعاع دو قوس ج‌د و ه‌ز را رسم کنید و اینها مقیاس اند دو زاویه اند پس بطریق مسئله سابقه

عمل را در دو قوس ج‌د و ه‌ز جاری نمایید زیرا که همانطور که خطی را بر خطی نقل میکنیم میتوان قوسی را نقل نمود بر قوس دیگر که بهمان شعاع باشد پس اگر این دو قوس را مقسوم علیه مشترکی باشد بوجه مذکور بدست آید و بعد نسبت عددی آنها و این نسبت بعینه نسبت این دو زاویه مفروضه است و ... مثلا اگر ... مقیاس مشترک دو قوس باشد ... مقیاس مشترک دو زاویه است
واگر دو قوس مفروض را مقسوم علیه مشترک نباشد دو زاویه نیز چنین است و آن وقت باید نسبت تقریبی آنها را بدست آورد.

مقاله سیم

در مقیاس و مساحت اشکال ذو کثیرة الاضلاع و تشابه آنها

حدود

۱- مساحت شکل عبارت است از نسبت وسعت آن شکل بوسعت واحد سطح و در کلام ممکن است دو کلمه سطح و مساحت بجای همدیگر استعمال شوند

۲- دو شکل متعادل آنستکه از حیثیت مساحت متساوی باشند دو شکل ممکن است متعادل باشند با آنکه بحسب صورت هیچ متشابه نباشند مثل دایره و مربع و همچنین مثلث و مربع مستطیل و امثال آنها

در دو شکل کلمه متساوی مخصوص آنست که چون یکی از آنها بر دیگری نقل شود در جمیع اجزای خود بر هم منطبق شوند مثل دو دایره که صاحب یک شعاع باشند و دو مثلثی که اضلاع نظیر بنظیر متساوی باشند و امثال آنها

۳- ارتفاع متوازیة الاضلاع عبارت است از عمود ه و که اندازه فاصله ما بین دو ضلع متقابل قاعدتین اب و حد باشد

۴- ارتفاع مثلث عمود اه است که از رأس زاویه ا اخراج شده باشد بر ضلع مقابل ب ح که قاعده است

۵- ارتفاع ذو ذنقه عمود ه و است که ما بین دو ضلع متوازیش اب و حد اخراج شده باشد

تنبیه قبل از رسیدن باین مقاله و مقالات ما بعد باید خواص تناسبات را دانست و تفصیل آنرا در اصول حساب و اصول جبر و مقابله ذکر نموده ایم و اینجا نظر بآنکه در احکام مربوطه ما بعد ابهامی نباشد بعضی تناسب اشاره نمائیم تناسب هندسی ا : ب = ح : د و از آنجا

میدانیم که حاصل ضرب طرفین ا × د مساوی نیست با حاصل ضرب وسطین ب × ج
این حکم در اعداد محقق است و گوئیم بجمیع مقادیر تعلق گیرد مشروط بر اینکه بعدد تعبیر شده باشند
یا چنان تصور کنیم که تعبیر شده اند و اینفرض تا اند وقوع یافت مثلا چهار مقدار ا و ب و ج
و د اگر خطوط باشند چنان تصور میکنیم که یکی از آنها یا خطی بخصم مقیاس مشترک تقسیم باشند
از واحد طول آنوقت هر کدام از ا و ب و ج و د تعبیری است از عدد احاد صحیح باشند
یا کسور منطق باشند یا اصم و تناسب مابین خطوط ا و ب و ج و د مبدل میشود به تناسب عددیه
پس مضروب دو خط ا و د که سطح نیز گوئیمش عبارت شد از عدد احاد طولی ا ضرب در عدد
احاد طولی د و معلوم است که چنین حاصل ضرب ممکن است مساوی شود بلکه باید مساوی شود
با حاصل ضربیکه بهمان نحو از دو خط ب و ج بدست آید

دو مقدار ا و ب ممکن است از نوعی باشند مثل خط و دو مقدار ج و د از نوع دیگر مثل سطح
در اینصورت باید آن مقادیر را عدد فرض نمود ا و ب احاد طولی باشند و ج و د احاد سطح
و دو حاصل ضرب ا × د و ب × ج نیز عدد میشوند

و بطور کلی در جمیع اعمال متعلقه بتناسبات باید بجای آنها هر کدام را عددی فرض نمود
از واحد نوع خود و آنوقت بی زحمت آن اعمال و نتایج شان مفهوم شوند

قضیهٔ اول

هر دو متوازی الاضلاعی که بر قاعده و ارتفاع واحد باشند معادل همدیگرند
بیان ا ب قاعده مشترک دو متوازی الاضلاع
ا ب ج د و ا ب ه و است و چون فرض کرده ایم
بر یک ارتفاع باشند دو قاعده فوقانی شان
د ج و ه و واقع شوند بر خطی موازی ا ب بنابر

توقیف متوازیة الاضلاع اه = ب و و ا ز = ب ه و همچنین د ح = اب و ز ه = = اب پس د ح = ز ه حال چون از تمام خط ده یکمرتبه ز د را تفریق کنیم و مرتبه دیگر ده را و باقی ح ه و د ز متساوی شوند و آن وقت دو مثلث د ا ز و ح ب ه اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند پس این دو مثلث متساویند

حال چون از ذو اربعة اضلاع ا ب ه د مرتبه مثلث ا د ز را موضوع کنیم باقی بماند متوازی الاضلاع ا ب ه ز و مرتبه دیگر مثلث ح ب ه را باقی بماند متوازی الاضلاع اب ح د پس این دو متوازی الاضلاع متساوی باشند

نتیجه - هر متوازی الاضلاعی مثل اب ح د معادل باشد با سطح ا ب ه ز که بر قاعده و ارتفاع اوست

قضیهٔ دوم

مثلث اب ح نصف متوازی الاضلاع اب ح د است که بر قاعده و ارتفاع آن باشد

زیرا که دو مثلث اب ح و ا ح د متساوی هستند (۱۳۳)

نتیجه ۱ - پس مثلث ا ب ح نصف سطح ب ح ه ز است که بر همان قاعده ب ح و همان ارتفاع ا ل باشد

زیرا که سطح ب ح ه ز معادلست با متوازی الاضلاع اب ح د

۲ - جمیع مثلثاتیکه بر قاعده و ارتفاع واحد باشند یعنی قاعدهشان متساوی باشد و ارتفاعشان متساوی معادل همدیگر هستند

قضیهٔ سیم

نسبت دو سطحی که بر ارتفاع واحد باشند مثل دو قاعدهٔ آنهاست

دو سطح مفروض اب ح د ا ب ه و ا ه و ز ارتفاع مشترک ا د و میگوئیم نسبت آنها بیکدیگر مثل اب است به

برهان فرض میکنیم دو قاعده اب و اه منطق باشند و نسبتشان مثل ۷ باشد به ۴ پس اب
را بهفت قسمت متساوی کنیم و اه شامل چهار از آن اجزا میشود و از نقاط تقسیم عمودها بر قاعده
اخراج کنیم تا بهفت سطح جزو متساوی بدست آید چونکه بر قواعد متساویه و بر ارتفاع واحد
و سطح اب جد شامل ۷ جزو از هفت جزو است و اه ده شامل چهار از آن جزو است نسبت ابجد
به اه ده مثل ۷ است به ۴ یا مثل اب به اه و دلیل مذکور کلی است هیچ تعلق بعدد مساوی
ندارد پس بنابر آنکه دو قاعده منطق باشند

اب جد : اه ده = اب : اه

واگر دو قاعده اب و اه اصم باشند باید مانند وجهی که در وجه اول ذکر شده است اینجا بیان نمود

قضیهٔ چهارم

نسبت دو سطح بیکدیگر مثل حاصل ضرب دو قاعده انها است در دو ارتفاع

فرض میکنیم سه و س مساحت دو سطح باشد و هه و عه دو بعد سطح سه و ق و ع دو بعد س
و سطحی دیگر فرض کنیم سه' بر قاعده اول هه و بر ارتفاع دوم ع پس بنابر قضیهٔ سابقه

سه : سه' = عه : ع

سه' : س = هه : ق

این دو تناسب را جزو بجزو درهم ضرب میکنیم و دو جملهٔ اول نسبت حاصل را بر سه' قسمت کنیم چنین میشود

سه : س = هه × عه : ق × ع — (۱)

در مساحت سطح مساحت نمودن سطح سه عبارت از یافتن نسبت وسعت او
بسطحی مثل س که واحد سطح فرض شده

و بنابر قضیهٔ مذکوره این نسبت برابر حاصل بدست آید که خطوط هه و عه و ق و ع را با واحد
طول سنجیده عدد هر کدام را معلوم کنیم و حاصل ضرب دو عدد اول را بر حاصل ضرب دو عدد

مانی قسمت کنیم مثال عه = ۶ ذرع عه = ۴ ، ق = ۳ ، ع = ۲

پس سه/سق = (۶×۴)/(۲×۳) = ۴ و بنابراین سطح سه چهار مثل سطح س واحد است

بیشتر نیست که واحد سطح را مربعی گیرند که ضلعش واحد طول باشد و در اینصورت چون

دو عدد ق و ع هر کدام واحد میشوند تناسب (۱) چنین میشود

سه : س = ه × عه : ۱

پس معلوم میشود که نسبت هر سطح مربعی که بر واحد طول مرتب شود مساوی است با حاصل
ضرب دو عدد مراتب قاعده و ارتفاعش و اینها احد طول میشوند و این مطلب بطور اختصار چنین
ادا کنیم که مقیاس واحد هر سطح حاصل ضرب قاعده اوست در ارتفاعش

مثال ه = ۳ ذرع و عه = ۲۵ ذرع

و مساحت سطح چنین است ۲۵ ۱۴ ۹ ر سانتی مربع یا ۳۵ ۹۴ ۷

قضیهٔ پنجم

مساحت متوازی الاضلاع مساوی است با حاصل ضرب قاعده اش در ارتفاعش

برهان - متوازی الاضلاع ا ب ج د معادلست
با سطح ا ب ه و که بر قاعده ا ب اوست و بر
ارتفاع ب ه آنش و مقیاس سطح مذکور است

ا ب × ب ه پس همین حاصل مساحت متوازی الاضلاع باشد

نتیجه - اشکال متوازی الاضلاعی که بر قاعده واحد باشند نسبتشان بهمدیگر
مثل ارتفاعات است و آنها که بر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل قواعد است زیرا
که چون ا و ب و ج را سه طول فرض کنیم این تناسب نتیجه میشود ا × ب : ج × ب = ا : ج

قضیهٔ ششم

مساحت مثلث مساویست بحاصل ضرب قاعده‌اش در نصف ارتفاع

برهان مثلث اب ج نصف متوازی الاضلاع اب ج ه است که برهان قاعده ب ج و همان ارتفاع اد رسم شده و مساحت شکل ثانی مساویست با ب ج × اد پس مساحت مثلث چنین باشد $\frac{1}{2}$ ب ج × اد یا ب ج × $\frac{1}{2}$ اد

نتیجه — هر دو مثلث که برا ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل دو قاعده است اگر قاعده واحد باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع است

قضیهٔ هفتم

مساحت ذوذنقه اب ج د مساویست با حاصل ضرب ارتفاع ه د در نصف مجموع دو قاعده متوازیه اب و ج د

برهان از نقطه ط وسط ضلع ج ب خط ک ل را بموازات ضلع مقابل اد رسم میکنیم و د ج را امتداد میدهیم تا آنرا بر نقطه ک ملاقی کند پس در دو مثلث ط ب ل و ط ج ک ضلع ط ب بعلت = ط ج و زاویه ل ط ب = ج ط ک و زاویه ط ب ل = ط ج ک چونکه ج ک موازیست با ب ل … پس این دو مثلث متساوی باشند … پس ذوذنقه اب ج د مساویست با متوازی الاضلاع ا د ک ل و مقیاس شکل ثانی هست ه د × ا ل و ا ل = د ک و چون مثلث ط ب ل = ک ج ط ضلع ب ل = ج ک پس اب + ج د = ا ل + د ک = ۲ ا ل و بنابراین ا ل نصف مجموع دو قاعده اب و ج د است … بصورت … اب ج د = ه د × $\left(\frac{\text{اب} + \text{ج د}}{2}\right)$

شرح — چون از نقطه ط وسط ب ج خط ط ح را بموازات قاعده اب رسم کنیم نقطه ح

نیز بر وسط اه افتد چونکه شکل اط ط ل و همچنین شکل ده ط ک نظر بتوازی اضلاع مقابله متوازی الاضلاع‌اند پس اط = ط ل و ده = ط ک و چون نظر بتساوی دو مثلث ب ط ل و ح ط ک ضلع ط ل = ط ک پس اط = ط ه

و نیز ظاهر است که ی ط = ال = $\frac{\text{اب} + \text{ه ح}}{۲}$

پس مساحت ذوزنقه را میتوان نیز باین صورت نوشت ه د × ی ط یعنی مساویست با حاصل ضرب ارتفاع در خط واصل ما بین منتصف دو ضلع غیر متوازی

قضیهٔ هشتم

هرگاه خط اح بر دو جزء اب و ب ح قسمت شده باشد پس مربع تمام اح مرکب باشد از مربع قطعه اب باضافه مربع قطعه ب ح باضافه مضاعف سطح دو قطعه اب و ب ح یعنی چنین اح^۲ یا (اب + ب ح)^۲ = اب^۲ + ب ح^۲ + ۲ اب × ب ح

برهان مربع اح ده را رسم کنید و اد را مساوی اب جدا کنید و د ط را بموازات اح رسم کنید و ب ی را بموازات اه

پس مربع اح ده بر چهار جزء قسمت میشود جزء اول اب س ز مربعی است مرسوم بر اب چونکه اد = اب و جزء دویم س ط ه ی مربعی است مرسوم بر ب ح چونکه اح = اه و اب = اد پس تفاضل اح − اب = تفاضل اه − اد و بنابراین ب ح = ه د و نظر بتوازی اضلاع س ط = ب ح و ه ط = ه د پس س ی ط ه مربعی است مرسوم بر ب ح و بعد از وضع این دو جزء از تمام مربع باقی میماند دو سطح ب ح ط س و د ز س ی که مقیاس هر کدام هست اب × ب ح فهو المطلوب

نتیجه فرض میکنیم ب و ح دو عدد باشند نظیر دو جزء خط اح پس عمل ضرب جبری این تساوی

نتیجه شود (ب + ج)^2 = ب^2 + ج^2 + ۲ ب ج

و چون مقیاس سطح را معلوم فرض کنیم این تساوی لیل دیگریست بر قضیهٔ مذکوره

و در دو قضیهٔ ذیل نیز باید چنین ملاحظه نمود

قضیهٔ نهم

خط از تفاضل دو خط اب و ب ج است پس مربع اج مرکب باشد از مربع اب باضافهٔ مربع ب ج منهای مضاعف سطح اب و ب ج یعنی چنین

اج^2 یا (اب − ب ج)^2 = اب^2 + ب ج^2 − ۲ . اب × ب ج

برهان — مربع اب ه و را رسم کنید و از او مساوی اج جدا کنید و ج ط را بموازات ب ه رسم کنید و ج ک را بموازات اب و مربع ه ز ل ک را تمام کنید پس مقیاس دو سطح ج ب ه ط و ط ل ک ز هر کدام عبارتست از اب × ب ج و بعد از وضع آنها از تمام شکل اب ه ل ک ه ز که عبارتست با اب^2 + ب ج^2 ظاهر است که باقی میماند مربع اج ز ه فهو المطلوب

حکم مذکور بدستور جبری نیز ثابت شود از اتحاد (ب − ج)^2 = ب^2 + ج^2 − ۲ . ب ج

قضیهٔ دهم

سطح مجموع و تفاضل دو خط اب و ب ج مساویست با تفاضل دو مربع آنها یعنی چنین (اب + ب ج) × (اب − ب ج) = اب^2 − ب ج^2

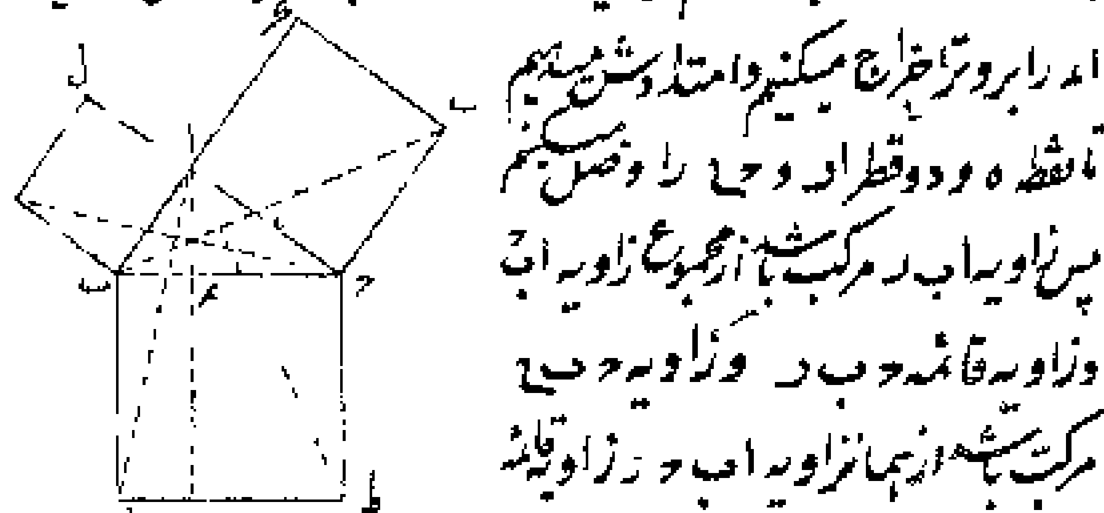
برهان — دو مربع اب ی د و اج ه ز را بر اب و اج رسم کنید و اب را امتداد دهید بقدری که بل مساوی شود با ب ج و سطح اک ل ه را تمام کنید

پس قاعده الک سطح بقدر مجموع دو خط اب و ب ج است وارتفاعش اه بقدر تفاضل
همان دو خط پس سطح الکله = (اب + ب ج) × (اب ـ ب ج) و لیکن این سطح
مرکب است از دو جزء اب ح ه + ب ح ل ک و جزء ب ح ل ک مساویست با
سطح ه د ط ر چونکه ب ح = د ه و ب ک = ه د پس الکله = اب ح ه + ه د ط ر
و مجموع مساویست با مربع اب ـ د منهای مربع د ـ ب ط که رسم شده است بر ب ج
پس خلاصه (اب + ب ج) × (اب ـ ب ج) = اب^۲ ـ ب ج^۲
شرح این حکم نیز از دستور جبری استنباط شود با این صورت

(ب ـ ج) (ب + ج) = ب^۲ ـ ج^۲

قضیهٔ یازدهم

در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساویست با مجموع دو مربع دو ضلع دیگر
برهان ـ مثلث اب ج قائم الزاویه است بنقطه ا و بعد از تربیع اضلاع از زاویه ا عمود



اد را برون اخراج میکنیم و امتداد میدهیم
تا نقطه ه و دو قطر ا د و ج ح را وصل میکنیم
پس زاویه اب د مرکب باشد از مجموع زاویه اب ج
و زاویه قائمه ج ب د و زاویه ح ب ج
مرکب باشد از همان زاویه اب ج و زاویه قائمه
اب ح پس زاویه اب د = ح ب ج و ضلع اب = ب ح چون دو ضلع مربع یک اند و همچنین
ب د = ب ج پس دو مثلث اب د و ح ب ج چون دو ضلع و زاویه بینهما شان
متساوی است مساوی باشند و مثلث اب د نصف سطح ب د ه ر باشد (و مرکب
اختصار سطح ب ه) که بر همان قاعده ب د و همان ارتفاع ب د است ف ۲

وهمچنین مثلث ح ب د نصف مربع ا ح است چونکه دو زاویه ب ا ه و ب ا ل قائمه اند
و دو جزء ا ه و ا ل واقع باشند بر استقامت خطی متوازی با ح ب پس مثلث ح ب د
و مربع ا ح بر قاعده واحده ب ح و بر ارتفاع واحد ا ب باشند و بنابراین مثلث
نصف مربع است

و اول ثابت کردیم که مثلث ا ب ر مساویست با مثلث ح ب د پس سطح ب د ه ر
که مضاعف مثلث ا ب ر است معادل باشد با مربع ا ح که مضاعف مثلث ح ب د است
و بهمین طور ثابت نمائیم که سطح ح د ه ط معادل باشد با مربع ا ب و از مجموع دو سطح ب د ه ر
و ح د ه ط مربع ب ح و ط ر ترکیب شود پس مربع ب ح و ط ر مرسوم بر وتر مساویست با
مجموع دو مربع ا ح ل و ا ب ک مرسوم بر دو ضلع دیگر باینصورت ب ح² = ا ب² + ا ح²
وجه دیگر - بعد از تربیع سه ضلع مثلث زاویه قائمه ب ... را مساوی ح ب و ا ر سیم میکنیم و ...
را مساوی ح ا جدا میکنیم و نقطه ... را بنقطه ک وصل میکنیم و نقطه ر را بنقطه ه و خط
ط ا را وصل میکنیم و امتداد میدهیم تا منتهی شود بنقطه د و حال میگوئیم که چهار ذوار بعة الاضلاع
ط ب ح د و ط ر ه د و ا ب ح ... و ا ح ل ... متساوی هستند

تساوی دو شکل اول را باینطور ثابت میکنیم
شکل ط ب ح د را دور ان میدهیم حول ط د که
منصف دو زاویه قائمه ط و د است پس دو
ضلع ط ر و د ه منطبق شوند بر ط ب و د ح
و خط ر ه بر ب ح

و در اثبات تساوی دو شکل ط ب ح د و
ا ب ح ... شکل اول را حول نقطه ب دوران میدهیم

تا ب ط واقع شود بر مساوی خود ب ا و ضلع ب ح نظر بتساوی دو زاویه ط ب ح و ا ب
واقع شود بر ب ح و نقطه ح بر ح و بالجمله نظر بتساوی دو زاویه ب ح ه و ب ح د خط
ح د منطبق شود بر مساوی خود ح ه

و بهمین جهة ثابت میکنیم که شکل ط ب ح د مساویست با ا ح ك ب
پس چهار ذوذاربعة الاضلاع متساوی شدند و شکل ط ب ح د ه ر معادل گشت با ا ب
ح ك د و حال چون از یکطرف دو مثلث متساوی را ه و ا ب ح را وضع کنیم و از طرف
دیگر دو مثلث ا ب ح و ح ب ك را باقی بماند مجموع دو مربع ا ب ط د + ا ح د ه
مساوی با مربع ب ح ك ح

نتیجه ۱ مربع یکی از دو ضلع مجاور بزاویه قائمه مساویست با مربع وتر منهای مربع ضلع دیگر
باینصورت $\overline{اب}^2 = \overline{بح}^2 - \overline{اح}^2$

۲ ـ شکل ا ب ح د مربعی است و ا ح قطر
آن مربع و مثلث ا ب ح قائم الزاویه است و
متساوی الساقین پس $\overline{اح}^2 = \overline{اب}^2 + \overline{بح}^2$
$= ۲ \cdot \overline{اب}^2$ پس نتیجه شد که مربع قطر ا ح مضاعف مربع ضلع ا ب است و چون
$\overline{اح}^2 : \overline{اب}^2 = ۲ : ۱$ بعد از استخراج جذر از طرفین میشود $اح : اب = \sqrt{۲} : ۱$ یعنی در
شکل مربع قطر و ضلع متباین باشند

۳ ـ در وجه اول ثابت شد که مربع ك ح معادلست با سطح ب ه د ر و نظر باشتراک ارتفاع
ب ر مربع ح ب ط ر نسبت بسطح ب ه د ر مثل قاعده ح ب است بقاعده ب ه
پس $\overline{بح}^2 : \overline{اب}^2 = بح : به$
یعنی که مربع وتر زاویه قائمه نسبت بمربع یکی از دو ضلعش مثل طول وتر است بقطعه

مجاور که بهمان ضلع و قطعه عبارت از آن جزو وتر است که تحدید شده باشد بعمود قائم از زاویه قائمه و از اینقرار ب د قطعه مجاوره بضلع اب است و د ج قطعه مجاوره بضلع اج و از اینقرار ب ج^2 : اج^2 = ب د : ج د

عم - دو سطح ب د ه ر و د ج ط ه نیز بر یک ارتفاع اند و بنابراین بر نسبت دو قاعده ب د و ج د و چون این دو شکل معادلند با دو مربع اب^2 و اج^2 پس اب^2 : اج^2 = ب د : د ج یعنی که مربع دو ضلع مجاور بزاویه قائمه بر نسبت دو قطعه میتوانند که مجاور آن دو ضلع باشند تنبیه مثلث قائم الزاویه نظر بانهمه خواص فوقیت شکل عروس گویند و اسم فرنگستان نظر باشکال برابر اینش پل خر گویند

حل - تصور خط ج د بر خط اب عبارت است از قطعه د واقعه مابین دو عمود وارده از دو نقطه ج و د بر خط اب

قضیه دوازدهم

در هر مثلث مربع ضلع مقابل بزاویه حاده مساویست با مجموع مربعین دو ضلع دیگر منهای مضاعف سطح یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دیگر بجین ضلع

مثلاً در مثلث اب ج زاویه حاده ج است و عمود اد را بر ب ج فرود می آوریم و میگوئیم

اب^2 = اج^2 + ب ج^2 − ۲ ب ج . ج د

برهان این شکل دو حالت دارد اول آنکه عمود در داخل مثلث اب ج واقع شود پس ب د = ب ج − ج د و بنابراین ف ۹ ب د^2 = ب ج^2 + ج د^2 − ۲ ب ج . ج د و چون بر طرفین مساوی اد^2 اضافه کنیم و ملاحظه نمائیم که در دو مثلث قائم الزاویه اب د

واز دو این دو تساوی حاصل است $\text{اد}^2 + \text{بد}^2 = \text{اب}^2$ و $\text{اد}^2 + \text{دج}^2 = \text{اج}^2$

معادله اول چنین شود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 - ۲\ \text{بج} \times \text{جد}$

حالت دویم هنگامیکه عمود اد خارج مثلث اب ج واقع شود پس بد = جد − بج و بنابراین ق ۸ $\text{بد}^2 = \text{جد}^2 + \text{بج}^2 - ۲\ \text{جد} \times \text{بج}$ و چون بر طرفین اد^2 بیفزائیم بطریق سابق چنین میشود $\text{اب}^2 = \text{جب}^2 + \text{اج}^2 - ۲\ \text{بج} \times \text{جد}$

قضیه سیزدهم

در هر مثلث منفرج الزاویه مربع ضلع مقابل بزاویه منفرجه مساوی است بمجموع دو مربع دو ضلع دیگر با اضافه مضاعف سطح یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دویم بر همین ضلع

مثل ضلع اب مقابل بزاویه منفرجه ج از مثلث اب ج پس از ا بر ب ج عمود کشیم و گوئیم $\text{اب}^2 = \text{اج}^2 + \text{بج}^2 + ۲\ \text{بج} \times \text{جد}$

برهان - عمود مذکور ممکن نیست در داخل مثلث واقع شود زیرا که اگر مثلا بر نقطه ه واقع میشد آنوقت مثلث اج ه دارا میشد زاویه قائمه ه و زاویه منفرجه ج را و این محال است پس باید در خارج واقع شود و بنابراین ب د = ب ج + ج د و بعد از آن ق ۸ $\text{بد}^2 = \text{بج}^2 + \text{جد}^2 + ۲\ \text{بج} \times \text{جد}$ و چون بر طرفین تساوی اد^2 اضافه کنیم و تصرف شکل سابق را در آن نمائیم چنین شود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 + ۲\ \text{بج} \times \text{جد}$

نتیجه - مثلث قائم الزاویه تنها دارای این خاصیت است که مجموع دو مربع دو ضلعش مساوی باشد با مربع ضلع سیم زیرا که اگر زاویه واقعه ما بین آن دو ضلع حاده باشد مجموع آن دو مربع

اعظم باشد از مربع ضلع مقابل و اگر منفرجه باشند اصغر باشد از آن مجموع

قضیهٔ چهاردهم

در هر مثلث مثل ابج چون خط اه از راس ا بر وسط قاعده وصل کنیم محکم شود

اب۲ + اج۲ = ۲ . اه۲ + ۲ . به۲

برهان عمود اد را بر قاعده بج فرود آوریم آنوقت بنا بر (۱۲) در مثلث اهج این تساوی نتیجه شود

اج۲ = اه۲ + جه۲ − ۲ . جه × هد

و در مثلث ابه بنا بر (۱۳) این تساوی

اب۲ = اه۲ + به۲ + ۲ . به × هد

و بعد از جمع دو تساوی و ملاحظه اینکه هب = هج چنین شود

اب۲ + اج۲ = ۲ . اه۲ + ۲ . به۲

قضیهٔ پانزدهم

که هر ذواربعه اضلاع مجموع مربعات چهار ضلعش مساویست با مجموع دو مربع دو قطر با اضافه چهار برابر مربع خط واصل مابین منتصف دو قطر

برهان اج و بد دو قطر ذواربعه اضلاع ابجد است و ه و ط دو نقطه وسط دو قطر و خطوط به و ده و هط را وصل میکنیم آنوقت بنا بر قضیه سابقه در مثلث ابج

اب۲ + بج۲ = ۲ . به۲ + ۲ . اه۲ و در مثلث اجد اد۲ + جد۲ = ۲ . ده۲ + ۲ . اه۲

و بعد از جمع اب۲ + بج۲ + اد۲ + جد۲ = ۲ (به۲ + ده۲) + ۴ . اه۲ و چون

در مثلث ده

در مثلث ب ه د $\overline{\text{به}}^2 + \overline{\text{ده}}^2 = 2\cdot\overline{\text{بط}}^2 + 2\cdot\overline{\text{هط}}^2$

پس $\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دج}}^2 = 4\,\overline{\text{بط}}^2 + 4\cdot\overline{\text{هط}}^2 + 4\cdot\overline{\text{اه}}^2$

وچون $\overline{\text{بد}}^2 = 4\,\overline{\text{بط}}^2$ و $\overline{\text{اج}}^2 = 4\,\overline{\text{اه}}^2$ پس

$\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دج}}^2 = 4\cdot\overline{\text{هط}}^2 + \overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اج}}^2$

نتیجه ـ اگر ذو اربعة اضلاع مذکور متوازی الاضلاع باشد خط ط ه معدوم شود پس چنین نتیجه میشود که در هر ذو اربعة اضلاع مجموع مربعات چهار ضلع مساوی با مجموع دو مربع دو قطر و عکس چنین حکم نیز صحیح است

در تشابه اشکال — قضیهٔ شانزدهم — خطوط متناسبه

هر خط که بموازات یکی از اضلاع مثلث رسم شود دو ضلع دیگرش را بیک نسبت قطع کند

برهان ـ ده خطی است موازی با قاعده ب ج از مثلث ا ب ج و اول فرض میکنیم که دو خط اد و دب مقیاس مشترکی داشته باشند

و آن سه مرتبه در اد یکجزو و دو مرتبه در دب و این تناسب نتیجه میشود $\text{اد} : \text{دب} = 3 : 2$

و بر نقاط تقسیم اب خطوطی بموازات ب ج رسم میکنیم و بر نقاط م و ن و ه و ل خطوطی بموازات اب پس جمیع مثلثات ا د م و م ع ن و غیره نظیر متساوی یک ضلع و دو زاویهٔ طرفین متساوی باشند مثلا در دو مثلث م ع ن و ن س ه دو زاویه م ع ن و ن س ه نظیر بموازی اضلاعشان متساوی باشند و نیز دو ضلع م ع و ن س نظیر متساویشان یا دو خط ک ف و ف د متساوی باشند

پس از تساوی این مثلثات چنین نتیجه میشود که $\text{ام} = \text{من} = \text{نه} = \text{هل} = \text{لج}$

وچون اه دارای ۳ جزو از این اجزاست و هج دارای ۲ جزو پس اه : هج = ۳ : ۲
وبعد از مقایسه این تناسب با تناسب سابق چنین نتیجه میشود اد : دب = اه : هج
واگر دو خط اد و دب اصم باشند و مقیاس مشترک نداشته باشند باید بطریق ۲۱۸
پیش رفت و ثابت نمود که همواره اندو خط بر نسبت اه و هج است

نتیجه ۱ - بترکیب تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود اد : اد+دب = اه : اه+هج
یا اد : اب = اه : اج

ونیز اد+دب : دب = اه+هج : هج یا اب : دب = اج : هج

نتیجه ۲ - در دو خط اب و دج اجزاء مفروزه بخطوط متوازیه اح و هر و طح و بد و غیره متناسب باشند زیرا که چون دو خط اب و جد را امتداد دهیم تا بر نقطه س متقاطع شوند در مثلث س ه ر خط اح موازیست با قاعده ه ر و از آن وقت
س ه : س ر = اه : حر و نیز در مثلث س طح این تناسب نتیجه میشود
س ه : س ر = ه ط : رح و بعد از وضع نسبت مشترک این تناسب

اه : حر = ه ط : رح

و همچنین تناسب میکنیم

ه ط : رح = طب : حد

قضیه هفدهم

وبالعکس اگر در مثلث اب ج دو ضلع اب و اج را خط ده چنان قطع نموده باشد که اد : دب = اه : هج یعنی بر نسبت واحد پس خط قاطع ده بموازات قاعده بج باشد

برهان اگر کوشید ده موازی نیست باب و فرض کنیم دد موازات آن باشد و آنوقت بحکم شکل سابق اد : دب = از : دح و بنابر فرض اد : دب = اه : هح

پس نظر بنسبت مشترکه اد : دح = اه : هح و

بعد از تبدیل اد : اه = دح : هح و این تناسب صحیح نیست چونکه از طرفی تالی اه اعظم است از اد و از طرفی تالی هح اصغر است از دح پس خطی که از نقطهٔ د بموازات ب ح رسم شود منطبق خواهد شد بر ده یعنی انخطی قاطع موازی ب ح است با قاعده مثلث

شرح ـ اگر خط قاطع این تناسب بدست اید اب : اد = اح : اه باز حکم مذکور صحیح است زیرا که بعد از تفصیل چنین شود اب ـ اد : اد = اح ـ اه : اه

یا چنین ب د : اد = ح ه : اه

قضیهٔ هیجدهم

در مثلث اب ح اولاً خط اد منصف زاویهٔ ا قاعدهٔ ب ح را قطع کند بدو جزء ب د و دح متناسب با دو ضلع اب و اح

و ثانیاً خط اد منصف زاویهٔ خارجه ح ا ه تحدید کند در امتداد قاعده دو قطعه ب د و حد را بر نسبت اندو ضلع اب و اح

برهان حکم اول بر نقطهٔ ح خط ح ه را بموازات دا رسم کنیم تا امتداد ب ا را بر ه قطع کند آنوقت در مثلث ب ح ه خط اد موازیست با قاعده ح ه و این تناسب نتیجه شود که ب د : دح = ب ا : اه

ولی مثلث ا ح ه متساوی الساقین است زیرا که نظر بتوازی دو ضلع اد و ح ه زاویه

اح ه = د اح و زاویه اه ح = ب اد و بنا بر فرض د اح = ب اد پس زاویه
اح ه = اه ح و بنا برین اه = اح حال چون در تناسب سابق اد را بجای اه قرار
دهیم چنین میشود ب د : د ح = ا ب : ا ح
برهان عکس حکم ح ز را بموازات د ا رسم کنید وقت
در مثلث باد این تناسب حاصل میشود
ب د : د ح = ب ا : ا ز و مثلث از ح و بدلیل
سابق متساوی الساقین است یعنی ا ز = ا ح پس ب د : د ح = ا ب : ا ح
نتیجه چون نقطه ا در سطح مثلث سیر کند بروجهی که نسبت اب به اح ثابت و برقرار باقی
ماند و آنرا $\frac{م}{ن}$ فرض میکنیم دو خطی که در هر موضع ا دو زاویه ب اح و ه اح را نصف
کند همواره مرور نماید بر همان دو نقطه مشخصه د و د زیرا که دو نسبت $\frac{ب د}{د ح}$ و $\frac{ب د}{د ح}$
باز مساوی هستند با $\frac{م}{ن}$ و باینحالت برقرار و چون دو خط اد و اد منصف دو زاویه
مجاوره پیوسته بر یکدیگر عمود اند پس نقطه ا در جمیع حرکاتش باید واقع شود بر محیط دایره
که بر قطر د د رسم شود و بنا برین مکان هندسی نقاطی که دو فاصله جمیع آنها
از دو نقطه ب و ح بر نسبت مفروض ثابتی باشد دایره است
حد مثلثات متشابهه آنانند که زوایاشان متساوی باشند و اضلاع متناظره
متناسب مقصود از اضلاع متقابله و متناظره آنها است که مقابل باشند بزوایای متساوی
ذو کثیرة الاضلاع متشابهه آنانند که زوایاشان نظیر بنظیر متساوی باشد و اضلاع متقابلشان
متناسب مقصود از اضلاع متقابله آنها است که مقابل باشند بزوایای متساوی

قضیه نوزدهم

در دو مثلث متساوی الزوایا اضلاع متناظره متناسب اند

مثلا دو مثلث مفروض اب ح است و ح د ه
که زوایاشان نظیر بنظیر متساویست از اینقرار ب ا ح
= ح د ه و اب ح = د ح ه و اح ب = د ه ح
ومیگوییم که اضلاع متناظره از اینقرار متناسبند

ب ح : ح ه = اب : د ح = اح : د ه

برهان دو ضلع متناظر ب ح و ح ه را بر یک استقامت قرار میدهیم و دو ضلع ب ا
و ه د را امتداد میدهیم تا بر نقطه ط متلاقی شوند
آنوقت چون خط ب ح ه مستقیم است و زاویه ب ح ا = ح ه د ضلع اح موازی میشود
با ه د و ط ا و همچنین چون زاویه اب ح = د ح ه خط اب موازیست با ح د
پس شکل ا ح د ط متوازی الاضلاع است
در مثلث ب ط ه خط اح موازیست با قاعده ط ه و بنابراین ب ح :
ح ه = ب ا : ا ط و چون بجای ا ط مساویش ح د را قرار دهیم چنین شود

ب ح : ح ه = ب ا : ح د

در همان مثلث ب ط ه چون ضلع ب ط را قاعده فرض کنیم خط ح د موازیست با
آن و بنابراین ب ح : ح ه = ط د : د ه و چون بجای ط د مساویش اح را قرار
دهیم چنین میشود ب ح : ح ه = اح : د ه
پس نظر بنسبت مشترک ب ح : ح ه از دو تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود

اح : د ه = ب ا : ح د

پس دو مثلث متساوی الزوایای ب ا ح و ح د ه اضلاع متقابلشان متناسب
شد و بنابر تعریف سابق متشابه باشند

نتیجه - پس شرط تشابه دو مثلث همین کافیست که دو زاویه اش نظیر بنظیر متساوی باشد زیرا که آنوقت زاویه سیم آنها نیز متساوی میشود و بعد اضلاع متناسب

قضیه بیستم

دو مثلث متناسب الاضلاع متساوی الزوایا باشند

مثلاً بج : هو = اب : ده = اج : دو و میکوئیم دو مثلث ابج و ده و بقایا شان متشابه هستند یعنی ا = د و ب = ه و ج = و

برهان - بر نقطه ه زاویه و ه ح را مساوی ب رسم میکنیم و بر نقطه و زاویه ه و ح را مساوی ج و زاویه سیم ح خود مساوی شود با ا و دو مثلث ابج و ه و ح متساوی الزوایا کردند پس بنا بر قضیه سابقه بج : هو = اب : ه ح و بنا بر فرض بج : هو = اب : ده و در این دو تناسب چون سه جمله مشترک است پس ه ح = ه د و نیز بنا بر همان قضیه بج : هو = اج : و ح و بنا بر فرض بج : هو = اج : دو پس و ح = و د پس اضلاع دو مثلث ه و ح و ده و نظیر بنظیر متساوی باشند و این دو مثلث متساوی و ۱۲ اول و بعل مثلث ه و ح را مساوی الزوایا ساختیم با مثلث ابج پس دو مثلث ده و و ابج نیز متساوی الزوایا باشند

شرح ۱ باید ملتفت شویم که زوایای متساویه دو مثلث مقابل باشند با اضلاع متناسبه

۲ - از این دو شکل چنین استنباط شد که تساوی زوایا لازم دارد تناسب اضلاع را و بالعکس تناسب اضلاع تساوی زوایا را بر وجهیکه در تحقق تشابه مثلثات وجود یکی از این دو شرط کافی باشد ولی این خاصیت مختص بمثلث باشد و در سایر اشکال که عدد

اضلاع شان را نسبتی و زاویه چنین نیست مثلا در ذو اربعه اضلاع میتوان بدون تغیر زوایا
نسبت اضلاع را تغیر داد و نیز بدون تغیر ضلع مقدار زوایا را تغییر داد و از تساوی
زوایا تناسب اضلاع لازم نیاید و نیز عکس آن
چنانچه اگر ه د را بموازات ب ج رسم کنیم زوایای
ذو اربعه اضلاع ا ه د ج مساوی باشند با زوایای
ذو اربعه اضلاع ا ب ج د ولی اضلاع بریک نسبت نباشند و نیز بدون تغیر چهار ضلع
اب و ب ج و ج د و د ا میتوان دو زاویه ب و د را دور و نزدیک نمود و مقادیر
جمیع زوایا را تغییر داد

شرح ۳ - چون دو قضیه مذکور را که حکم یک شکل دارند ترکیب کنیم با شکل عکوس این
احکام مفید تر و کثیر الاستعمال تر جمیع احکام اصول هندسه باشند و میتوان گفت که از روی
همین دو سه حکم جمیع مسائل حل شوند و در عملیات با کفایت کنند و نکته اش اینست که
هر شکل را میتوان بمثلثات قسمت نمود و هر مثلث را بدو مثلث قائم الزاویه و از انتقال خواص
کلیه مثلثات ضمنا دارا باشند خواص جمیع اشکال را

قضیه بیست و یکم

هرگاه در دو مثلث یک زاویه مساوی باشد و دو ضلع طرفین متناسب اند و مثلث متشابه باشند

فرض میکنیم زاویه ا = د و نسبت اب : ده = اج : دو
میگوییم مثلث ا ب ج شبیه است بمثلث د ه و
برای آن اط را مساوی ده جدا میکنیم و طی را بموازات
ب ج رسم میکنیم پس زاویه اطی مساوی شود بزاویه

اب ج و د ه ز را و مثلث ا ط ح زوایایش مساوی میشود با زوایای مثلث اب ج پس
اب : ا ط = اج : ا ح ولی بفرض اب : د ه = اج : د ز پس ا ط = د ه پس این دو
تناسب در یک جمله مشترکند و بنابراین ا ح = د ز پس در دو مثلث ا ط ح و د ه ز
دو ضلع و زاویه بینهما متساوی است و این دو مثلث متساوی باشند و چون مثلث
ا ط ح شبیه است بمثلث اب ج پس د ه ز نیز شبیه باشد بمثلث اب ج

قضیه بیست و دوم

هر دو مثلث که اضلاعشان متوازی باشند یا عمود بر همدیگر متشابه
بوند فرض میکنیم ا و ب و ج زوایای یکی از دو مثلث باشد و اَ و بَ و جَ زوایای
مثلث دیگر

و میدانیم که اضلاع دو زاویه هرگاه متوازی باشند یا عمود نسبت بهم اند زاویه متساوی
باشند یا تمام همدیگر پس فرضهای ممکنه منحصر باشد در یکی از این سه صورت

اولاً ا + اَ = ۲ق و ب + بَ = ۲ق و ج + جَ = ۲ق

ثانیاً ا + اَ = ۲ق ، ب + بَ = ۲ق و ج = جَ

ثالثاً ا = اَ و ب = بَ و بنابراین ج = جَ

بر فرض اول مجموع زوایای دو مثلث مساوی میشود بشش قائمه
و بر فرض دوم مجموع از چهار قائمه تجاوز کند
پس همان فرض سیم صحیح و مقبول باشد و بنابراین دو مثلث متساوی الزوایا و آنوقت متشابه
تنبیه در این شکل اضلاع متناظره دو مثلث آنها باشند که متوازیند یا عمود بر همدیگر

قضیه بیست و سیم

دو کثیر الاضلاع متشابه را میتوان قسمت کرد بعدد یکسان مثلثهای متشابه و متشابه الوضع

برهان: در کثیر الاضلاع ا ب ج د ه از زاویه ا
دو قطر ا ج و ا د را بزاویهای غیر مجاوره وصل
میکنیم و در کثیر الاضلاع دیگر ز ح ط ی ک
نیز همچنان از زاویه نظیر ا دو قطر ز ط و ز ی
را وصل میکنیم آنوقت نظر بتشابه دو کثیر الاضلاع
زاویه ا ب ج = نظیر خود ز ح ط و دو ضلع ا ب و ب ج متناسب باشند با نظیر خود ز ح و
ح ط یعنی ا ب : ز ح = ب ج : ح ط یعنی در آن دو مثلث یک زاویه مساویست و دو ضلع
طرفین متناسب پس متشابه باشند و زاویه ب ج ا مساوی شود با ح ط ز و چون این دو
زاویه متساویه را وضع کنیم از دو زاویه متساویه ب ج د و ح ط ی باقی بماند ا ج د = ز ط ی
و حال ذکر شد که نظر بتشابه دو مثلث ا ب ج و ز ح ط نسبت ا ج : ز ط = ب ج : ح ط
و نظر بتشابه دو کثیر الاضلاع ب ج : ح ط = ج د : ط ی پس بسبب اشتراک نسبت ا ج :
ز ط = ج د : ط ی و قبل از این ملاحظه شد که زاویه ا ج د = ز ط ی پس دو مثلث ا ج د
و ز ط ی نیز دارای یک زاویه مساوی و دو ضلع طرفین متناسب اند و بنا بر این متشابه باشند
و بهمین جهة ثابت میکنیم که سایر مثلثات هم بترتیب متشابه اند و از اینقرار دو کثیر الاضلاع
متشابه مرکب باشند از عده واحده از مثلثات متشابهه و متشابهة الوضع

شرح - عکس قضیه مذکوره نیز صحیح است یعنی اگر دو کثیر الاضلاع مرکب باشند
از یک عده از مثلثات متشابهه و متشابهة الوضع متشابهند
زیرا که از تشابه مثلثات متشابه نتیجه میشود که ا ب ج = ز ح ط و ب ج ا = ح ط ز و
ا ج د = ز ط ی پس ب ج د = ح ط ی و هکذا ج د ه = ط ی ک و غیره و علاوه بر این
از تناسب اضلاع مثلثات متناسبه نتیجه شود ا ب : ز ح = ب ج : ح ط

= اح : وط = حد : طب وغیره پس زوایای وکثیر الاضلاع متساوی شده و اضلاعشان متناسب و بنابراین متشابهند

قضیهٔ بیست و چهارم

خطوط ار و اط وغیره که از راس مثلث بقاعده اش ب ح وصل شوند انقاعده و موازیش ده را بیک نسبت قطع کنند این تناسب نتیجه شود

د ر : ب ر = ر ل : ر ط = ل ل : ط ی وغیره

برهان خط ده چون موازیست با ب ر دو مثلث اده و ابر متساوی الزوایا باشند و بنابراین ده : ب ر = ا ه : ا ر و همچنین نظر بتوازی ه ل و رط این تناسب حاصل شود ا ه : ار = ه ل : رط و بسبب اشتراک نسبت ا ه : ار این تناسب حاصل شود ده : ب ر = ه ل : رط و همانو جد این تناسب حاصل شود ه ل : رط = ل ل : ط ی و بکذا پس خط ده قسمت شده است بر نقاط ه و ك و ل بهمان نسبت که خط ب ح بر نقاط ر و ط و ی قسمت شده

نتیجه پس اگر ب ح را بر نقاط ر و ط و ی باجزای متساویه قسمت کنیم موازیش ده نیز باجزای متساویه قسمت شود بر نقاط ه و ل و ل

قضیهٔ بیست و پنجم

چون از زاویه قائمه ا از مثلث قائم الزاویه ب اح عمود ار را بر وتر اخراج کنیم گوئیم اولاً دو مثلث جزء اب ر و ا ر ح متشابهند و مشابه با مثلث کل ثانیاً هر کدام از دو ضلع اب و اح واسطه هندسی باشند ما بین وتر ب ح

مساحت کثیرالاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایره محاطیه

برهان در شکل سابق کثیرالاضلاع مفروض ح ط ک ... بهت و مساحت مثلث ح م ط = ح ط × $\frac{1}{2}$ م ع و مساحت مثلث ط م ب = ط ب × $\frac{1}{2}$ م ف ولی ف م = م ع پس مساحت مجموع دو مثلث = (ح ط + ط ب) × $\frac{1}{2}$ م ع و چون همین وجه در سایر مثلثات پیش و یم معلوم میشود که مساحت مجموع آنها یعنی مساحت کثیرالاضلاع تمام = مجموع قواعد ح ط + ط ب + ... که محیط شکل باشد ضرب در $\frac{1}{2}$ م ع که نصف شعاع دایره محاطیه باشد

شرح ـ شعاع دایره محاطیه یعنی م ع بعینه عمودیست که از مرکز بر یکی از اضلاعش اخراج شود و آنرا گاه ارتفاع کثیرالاضلاع نیز گوییم

قضیه هشتم

دو کثیرالاضلاع منتظم که عدد اضلاعشان برابر باشد محیطشان بر نسبت دو شعاع دو دایره محیطه است و نیز بر نسبت دو شعاع دو دایره محاطیه و سطوحشان بر نسبت مربعات همان شعاعهاست،

برهان اب ضلع یکی از دو کثیرالاضلاع است و ه مرکزش و بنابراین ه‌ا شعاع دایره محیطه‌اش و ه م عمود بر اب شعاع دایره محاطیه است و همچنین اَبَ ضلع کثیرالاضلاع دیگر که مشابه اوّل است و هَ مرکزش و هَ اَ شعاع دایره محیطه‌اش و هَ مَ شعاع دایره محاطیه‌اش است محیط دو کثیرالاضلاع بر نسبت دو ضلع اب و اَبَ است

و دو زاویه ا و اَ چون هر کدام نصف زاویه کثیر الاضلاع است متساوی باشند و همچنین دو زاویه ب و بَ پس دو مثلث ا ب ه و اَ بَ هَ متشابه باشند و همچنین دو مثلث قائم الزاویه ا د ه و اَ دَ هَ پس اب : اَبَ = اه : اَهَ = ده : دَهَ پس محیط دو کثیر الاضلاع متناسب باشند بنسبت دو شعاع اه و اَهَ از دو دایره محیطه و نیز بنسبت دو شعاع ده و دَهَ از دو دایره محاطه

و چون سطح دو کثیر الاضلاع بنسبت مربع دو ضلع متناظر اب و اَبَ اند پس متناسب باشند بنسبت مربع دو شعاع اه و اَهَ از دو دایره محیطه و بنسبت مربع دو شعاع ده و دَهَ از دو دایره محاطه

در مساحت دایره

تعریف

خط منحنی محدب آنست که چون بهر نقطه اش خطی مماس کشیده تمام منحنی در یک سمت خط افتد خط منحنی محدب را چون خطی قطع کند فصل مشترکش از دو نقطه بیشتر نباشد پس اگر خط م ن منحنی را بر سه نقطه ا و ب و ح قطع کند ظاهر است که چون مماسی بر یکی از نقاط ما بین مثل ب رسم کنیم قطعه از منحنی بیک سمتش افتد و قطعه بسمت دیگر

و محیط دایره خط منحنی است محدب

قضیه نهم

خط محدب ا م ب اقصر است از هر خطی که بر آن محاط نموده باشد و برنقطه منتهی شده باشد که نقطه ا و ب

برهان. اگر گوئید ا م ب نیست اقصر از جمیع خطوط محیطیه‌اش پس میان آن خطوط باید خطی پیدا شود اقصر از باقی که کوچکتر باشد از ا م ب یا متساوی با آن باشد

چنین خطی را ا د ه ب فرض میکنیم و بر نقطه از خط ا م ب که غیر مشترک باشد در دو خط مثل م مماس ل م ک را رسم میکنیم آن خط مندرج شود ما بین دو خط ا م ب و ا د ه ب چونکه اولی محدب است و خط ل ک اقصر است از ل د ه ک پس چون بجای قطعه ل د ه ک خط مستقیم ل ک را قرار دهید خط محیطی ا ل ک ب اقصر میشود از ا ل د ه ک ب و حال آنکه بفرض ما خط اخیر اقصر بود از باقی پس فرض باطل است و جمیع خطوط محیطیه اطول‌اند از خط ا م ب

و بهمین حجت ثابت کنیم که خط محدب مسدود ا م ب اقصر است از هر خطی که از اطراف بر آن احاطه نموده باشد

قبل از ذکر اصول مبحث حدود که در مساحت اشکال منحنیه بکار آید شرح معانی بعضی اصطلاحات مستعمله باید نمود

مقدار تغییر پذیر آنست که در حالات و اوضاع مختلفه کمیت متدرجاً بان تعلق گیرد

حدّ عبارت از مقداریست ثابت که مقدار تغییر پذیر تا هر مقام بتواند بان نزدیک شود ولی نتواند بآن رسد

در علم حساب و هندسه امثله عدیده هست از مقادیر تغییر پذیر و از حدود که بسمتشان مقادیر میل میکنند

مثلاً میدانیم که مقدار زاویه کثیر الاضلاع منتظم که صاحب ن ضلع باشد هست $\frac{۲ن-۴}{ن} = ۲ - \frac{۴}{ن}$
و چون فرض کنیم عدد اضلاع متدرجاً ترقی کند تا ما لا نهایه معلوم است که مقدار زاویه بسمت

ترقی کند و آنوقت که ع را بی‌اندازه بزرگ فرض کنیم کسر ۴/ع کوچکتر شود از هر مقدار مفروض
و معلوم شود که مقادیر متناهیه زاویهٔ کثیرالاضلاع منتظم حدش دو قائمه است
و همچنین اگر اب را بر ح نصف کنیم و حب را بر ح' و هکذا

ا ——— ح ح' ح'' ب

آنوقت می‌بینیم که خطوط اح و اح' و اح'' ...... حد مقادیرشان اب است
و از اینگونه امثال بیشمار میتوان آورد
ولی باید این فقره را نیز دانست که ممکن است مقداری تغییر کند و حدی نداشته باشد
مثلاً مجموع ع جملهٔ اول تناسب هندسی با فزایش مقدار ع متزاید و مجموع را حدی نباشد
جز در این صورت که نسبت متناقص باشد ولی اگر متزاید باشد حد مجموع الی غیرنهایت است

قضیهٔ دهم ۱۰

هرگاه دو مقدار تغییر پذیر ح و د در ضمن تغییر و تقرب بحدشان پیوسته متساوی باشند حدهاشان ح' و د' نیز متساویند

برهان فرض میکنیم دو تغییر پذیر ح و د در تحت حد خود ب و ه باشند و تجاوز نکنند و این دو را قرار میدهیم ح' = ح + ب ، د' = د + ه
(و ب و ه ممکن است کوچکتر از هر مقدار معروض شوند)
و چون متساوی ح و د را از اول تعریف کنیم این تساوی حاصل میشود ح' - د' = ح - د + ب - ه = ب - ه (چونکه بنا بر فرض ح = د)
حال اگر ما بین ح' و د' تفاضلی مثل ل فرض کنیم این تساوی حاصل شود ل = ب - ه
و این محال است چونکه ب و ه و بنابراین تفاضلشان از هر مقدار مفروضی کوچکتر شوند
و اگر دو تغییر پذیر در تقرب بحد خود متناقص میشدند نه متزاید دلیل مانند مذکور بود

قضیهٔ یازدهم

هرگاه دو متساوی ح و د حاصل ضربشان بسمت حدّ خود ط و ی میل کنند
خود حاصل ضرب ح × د حدش ط × ی باشد

برهان این دو متساوی را قرار میدهیم ط = ح + ب و ی = د + ه
و آنها را در هم ضرب میکنیم چنین میشود

ط × ی = ح د + د ب + ح ه + ب ه

و چون هر قدر ح و د بسمت حدّ خود میل کنند دو مقدار ب و ه بنهایت تنزل میکنند
حاصل ضرب ب د و ح ه و ب ه بی اندازه کوچک شوند پس مجموعشان نیز هرچند میخواهیم کوچک
تواند شد پس مقدار ح د هرچند بخواهیم تواند نزدیک شد به ط ی

و چون حکم در حاصل ضرب دو عامل مبرهن شد بلی زحمت میتوان آنرا در چند عامل جاری ساخت
نتیجه — حدّ خارج قسمت دو تغیرپذیر ح و د مساویست با خارج قسمت دو حدّشان

قضیهٔ دوازدهم

اولاً — محیط دایره حدّیست مشترک که بسمتش میل میکنند دو محیط دو کثیر الاضلاع
منتظم متشابه محاطی و محیطی که عدد اضلاعشان بتضاعیف ترقی کند
ثانیاً مساحت دایره حدّیست که بسمتش میل میکنند سطوح همان اشکال

اولا فرض میکنیم ا د ه کثیر الاضلاع منتظم محاطی باشد
و ح ه د کثیر الاضلاع منتظم محیطی وطول محیط دایره
مندرج است مابین دو محیط این دو کثیر الاضلاع و عدد
اضلاعشان را متصل مضاعف کنیم از روی خود شکل
ظاهر میشود که محیط کثیر الاضلاع محاطی روی تزاید نهاده

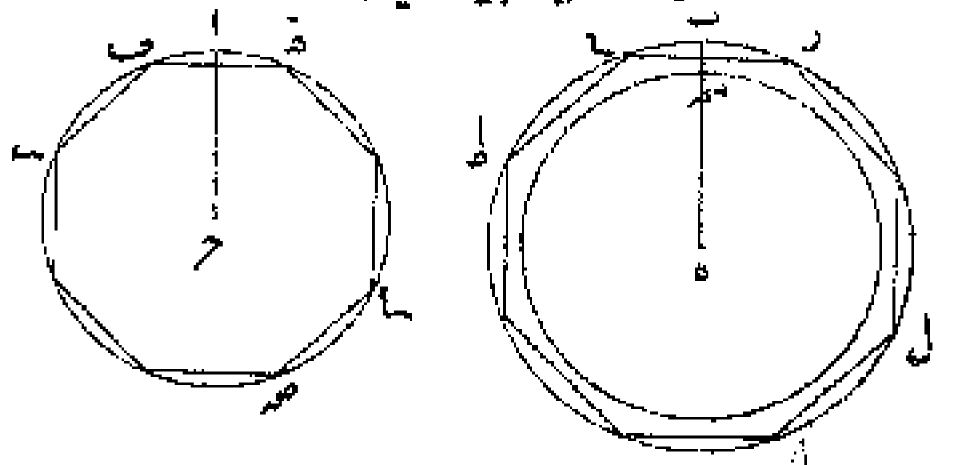
و محیط کثیرالاضلاع محیطی روی بتناقص گذارد
پس این دو محیط همواره باید نزدیکتر شوند هر چند عدد اضلاع بیشتر مضاعف
شود و اگر بهمین قسمت ثابت کنیم که تفاضل ما بین آنها ممکن است از هر مقدار مفروض
کوچکتر شود مبرهن میشود که آن دو محیط هر چند بخواهیم بدایره میتوانند نزدیک شد
فرض میکنیم م و مـ محیط دو کثیرالاضلاع ح ه ه و ح د هـ باشند پس
م : مـ = ر ا : ر ب و بتفصیل نسبت م − مـ : م = ر ا − ر ب یا ب ا : ر ا
و بنابراین م − مـ = (م × ب ا) / ر ا
و چون ب ا اقصر است از ا د و ا د اقصر است از وتر ش و وترها
موتر بی اندازه کوچک شوند از آنجهت که در سلسله شاب بر نسبت ا و ½ و ¼ و ⅛ و
1/16 و ..... تنزل کنند و م نیز روی بتنزل است و ر ا مقدارش ثابت پس بحکم
اینمقادیر در تساوی مذکور چنین نتیجه میشود که م − مـ بی اندازه بسمت صفر نزدیک شود فهو المطلوب
ثانیاً. فرض میکنیم سه و س مساحت همان دو کثیرالاضلاع باشد و مانند مذکور
ثابت میکنیم که چون عدد اضلاع آنها روی بترقی نهد سه و س بی اندازه بسطح دایره
نزدیک شوند و مبرهن شود که حد آن دو سطح دایره است همین قدر که بنمائیم سه − س
ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود و پس گوئیم بنابر (۸)
سه : س = ر ا² : ر ب² و بتفصیل نسبت سه − س : سه = ر ا² − ر ب² یا
ب ا² : ر ا² و بنابراین سه − س = (سه × ب ا²) / ر ا²
و ظاهر است که این تفاضل بی اندازه مائل است بسمت صفر زیرا که چون عدد اضلاع
مضاعف شود سه روی بتناقص نهد و ب د که اقصر است از ا د ممکن است بی
اندازه کوچک شود و د ا ثابت است فهو المطلوب

تنبیه حد ارتفاعات اشکال کثیر الاضلاع منتظمه محاطیه و محیطیه شعاع دایره است

قضیه سیزدهم

اوّلاً - نسبت محیط دو دایره بیکدیگر مثل طول اشعه آنها باشد

ثانیاً - نسبت سطوح دو دایره بیکدیگر مثل مربعات همان اشعه باشد



اوّلاً - محاط میکنیم در دو دایره که شعاع ه ب و ه' ا اند دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه و م و م' محیط آنها باشد و ق و ن دو شعاع ه ب و ه' ا و د و د' دو محیط دایره پس ق ۸ $\frac{م}{ق} = \frac{م'}{ن}$

حال چون عدد اضلاع دو کثیر الاضلاع محاطی را بی اندازه تضعیف کنیم دو محیط م و م' بی اندازه نزدیک شوند به د و د' و بنا بر این دو خارج قسمت $\frac{م}{ق}$ و $\frac{م'}{ن}$ میل کنند بسمت دو حد $\frac{د}{ق}$ و $\frac{د'}{ن}$ ق ۱۱ و چون از تساوی دو تغییر پذیر تساوی دو حدشان لازم آید ق ۱۰ پس $\frac{د}{ق} = \frac{د'}{ن}$ (۱)

ثانیاً - سطح دو دایره را ح و ح' فرض میکنیم و مساحت دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه محاطیه را س و س' پس ق ۸ $\frac{س}{ق^2} = \frac{س'}{ن^2}$

و چون حد دو مقدار $\frac{س}{ق^2}$ و $\frac{س'}{ن^2}$ این دو مقدار است $\frac{ح}{ق^2}$ و $\frac{ح'}{ن^2}$ پس ق ۱۰

(۲) ح / ۲ه = ط / ۲ن

شرح - از تساوی (۱) این تساوی استنباط شود

(۳) مح / ۲ه = مط / ۲ن

یعنی که نسبت محیط هر دایره بقطرش مقداریست در جمیع دوایر ثابت و این نسبت را ما در حساب و در قانون ناصری با علامت تحقیق نمودیم (وان سه حرف اول کلمات نسبت محیط و قطر است) و در جمیع ممالک مهندسین آنرا باین علامت π بنمایند و آن حرف یونانی است و پی تلفظ شود و پس نظر باختصار صورتش را نیز تابعت جمهور نموده در این کتاب بهمین علامت π بنمائیم و مقدار این نسبت اصم است و بتقریب استخراج شود و ان بکسر اعشار تا حوالی قسمت

$$\pi = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ \ldots$$

و دستور استخراج این عدد و تقریبی را عن قریب بوجهی مختصر بیان میکنیم حال چون در تساوی (۳) بجای مح / ۲ه معادلش π را قرار دهیم این تساوی حاصل میشود مح / ۲ه = π و بعد مح = ۲ π ه (۴) یعنی محیط هر دایره مساویست مضاعف π ضرب در شعاع.

تعریف - دو قوس متشابه اب و د ر بر نسبت دو شعاع ح ا و ه د میباشند ثانیاً دو قطاع متشابه ب ح ا و د ه ر بر نسبت دو مربع همان دو شعاع میباشند

اولاً بنا بر (و ۲۱) قوس ب ا : محیط ا ح = ح : ۴ م
و همچنین قوس ر د : محیط ه د = ه : ۴ م
و نظر بتساوی دو زاویه ح و ه این تناسب حاصل شود
قوس ب ا : قوس د ر = محیط ح ا : محیط ه د = ح ا : ه د

ثانیاً بنا بر همان (و ۲۱) قطاع ا ح ب : دایره ح ا = ح : ۴ م

قطاع م ه د : دایره ه د = مه^۲ : ه^۲

وبنابراین قطاع ا ح ب : قطاع م ه د = دایره آح : دایره مه = اح^۲ : مه^۲

قضیهٔ پانزدهم

مساحت دایره مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع

بر دایره ه ا کثیرالاضلاع منتظمی محیط میکنیم و فرض میکنیم م محیط این کثیرالاضلاع باشد
و س سطحش و ه شعاع ها باشد پس س = م × $\frac{ه}{۲}$
و چون عدد اضلاع کثیرالاضلاع محیطی را بی اندازه تضعیف
کنیم حاصل ضرب م × $\frac{ه}{۲}$ بی اندازه نزدیک شود
بمحیط ه × $\frac{ه}{۲}$ و حدّ س سطح دایره ه است پس
دایره ه = محیط ه × $\frac{ه}{۲}$ و سابق گذشت که محیط ه = ۲ π ه پس بعد از تبدیل

مساحت دایره ه = ۲ π ه × $\frac{ه}{۲}$ = π ه^۲

مثال فرض میکنیم ه = ۳ و مقدار π را بتقریب ۳٫۱۴۱۵ فرض میکنیم پس

مساحت دایره ه = ۲۸٫۲۷۳۵

نتیجه — مساحت قطاع دایره مساویست با حاصل ضرب طول قوسش در نصف شعاع

برهان — نسبت قطاع ا ح ب بتمام دایره مثل
قوس ا م ب است بتمام محیط ا ب د
یا مثل ا م ب × $\frac{۱}{۲}$ اح است به ا ب د × $\frac{اح}{۲}$
و مساحت تمام دایره نیست ا ب د × $\frac{اح}{۲}$
پس مساحت قطاع اح ب این باشد ا م ب × $\frac{اح}{۲}$
مثال فرض میکنیم شعاع اح = ۱۲ و قوس ا م ب مقدارش ه ج پس طول آن

این قوس از روی این حساب بدست آید قوس ا م ب : $۲\pi د = ۶۰ : ۳۶۰$

وبنابراین قوس ا م ب $= \frac{۲\pi د \times ۶۰}{۳۶۰} = \frac{\pi د}{۳} = \frac{۱۲\pi}{۳} = ۴\pi$

پس قطاع ا ح ب $= ۴\pi \times ۶ = ۲۴\pi = ۷۵٫۳۹۸۴۰$ ذرع مربع

در مسائل متعلقه باشکال کثیرالاضلاع منتظمه و استخراج نسبت محیط بقطر

قضیهٔ عامّ مسئله

درصورتیکه معلوم باشد ضلع کثیرالاضلاع منتظم محاطی و شعاع دایره ه ح میخواهیم معلوم کنیم ضلع کثیرالاضلاع منتظم محاطی دیگررا که عدد اضلاعش مضاعف کثیر الاضلاع مفروض باشد

فرض میکنیم ا ب = ل ، ه ح = د و ا ح = ط
و دو خط ا د و ا ه را وصل میکنیم آنوقت در مثلث قائم الزاویه ح ا د این تساوی حاصل شود $\overline{اح}^2 = ح د \times ح ب$ یا $ط^2 = ۲د \times ح ب$

و چون ح ب = ح ه − ه ب = د − ه ب

و در مثلث قائم الزاویه ا ه ب این تساوی حاصل شود $ه ب = \sqrt{\overline{اه}^2 - \overline{اب}^2} = \sqrt{د^2 - \frac{ل^2}{۴}}$

پس $ح ب = د - \sqrt{د^2 - \frac{ل^2}{۴}}$

و بنابراین $ط^2 = ۲د \times \left(د - \sqrt{د^2 - \frac{ل^2}{۴}}\right)$ (۱)

وبالعکس اگر ط معلوم باشد بتوان ل را استخراج نمود و درخصوص باید دستور (۱) را نسبت به ل حل نمود آخر این دستور حاصل میشود

$ل^2 = \frac{ط^2(۴د^2 - ط^2)}{د^2}$ (۲)

مثال دستور (۱) فرض میکنیم ل ضلع مسدس باشد و بنابراین ل = د و از آن قرار

طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاطی چنین میشود

$ط = \sqrt{۲ه^۲(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲})} = \sqrt{\frac{ه^۲}{۴}(۸-۴\sqrt{۳})} = ه\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$

مثال دستور (۲) فرض میکنیم ط ضلع معشر باشد و میخواهیم ضلع مخمس را معلوم نمائیم

و از سابق میدانیم که $ط = \frac{ه(\sqrt{۵}-۱)}{۲}$ پس

$ل^۲ = \frac{\frac{ه^۲(۶-۲\sqrt{۵})}{۴}\left(۴ه^۲ - \frac{ه^۲(۶-۲\sqrt{۵})}{۴}\right)}{ه^۲} = \frac{ه^۲}{۴}(۱۰-۲\sqrt{۵})$

و بنا بر این $ل = \frac{ه}{۲}\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}$

تبصره — چون مربع شعاع را بر مربع ضلع معشر بیفزائیم این مجموع

$ه^۲ + \frac{ه^۲(۶-۲\sqrt{۵})}{۴}$

مساوی میشود با $\frac{ه^۲(۱۰-۲\sqrt{۵})}{۴}$ که مربع ضلع مخمس باشد پس

ضلع مخمس محاطی وتر مثلث قائم الزاویه باشد که یکی از دو ضلع زاویه

قائمه اش شعاع دایره باشد و ضلع دیگرش ضلع معشر

قضیهٔ امسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع کثیر الاضلاع منتظم و شعاع دایرهٔ

محیطیه اش میخواهیم استخراج کنیم ضلع کثیر الاضلاع محیطی متشابهش را

فرض میکنیم اب = ل و ج ا = ه

و ده = م

و بتشابه دو مثلث ه ج د و ا ج ب

ه د : اب = ج ه : ج ا

و نیز ج ه : ج ا = ج ب : ج ح

پس نظر به نسبت مشترکه ه د : اب = ج ب : ج ح یا م : ل = ه : ج ح (1)

در مثلث قائم الزاویه اده این تساوی حاصل شود ده = √(اد² − اه²) = √(ر² − ل²/۴)

پس م : ل = ه : √(ر² − ل²/۴) وبنابراین م = √(۴ر² − ل²) / ن ل ر

قضیۀ ۱۸ مسئله

درصورتیکه معلوم باشد ضلع اب از کثیر الاضلاع منتظمی که دارای ن ضلع باشد و شعاع ر دایرهٔ محیطیه میخواهیم مساحت کثیر الاضلاع را استخراج کنیم

فرض میکنیم در شکل سابق اب = ل و حا = ر و س مساحت شکل باشد

پس س = ن × ل ه/۲ و ح ه = √(ر² − ل²/۴) = ½ √(۴ر² − ل²)

پس س = ن ل √(۴ر² − ل²) / ۴

مثال مطلوب است مساحت مسدس منتظم و ن = ۶ و ل = ر پس

س = ۶ر √(۴ر² − ر²) / ۴ = ۳ر² √۳ / ۲

تنبیه - میتوان از روی همان مفروضات در شکل سابق مساحت کثیر الاضلاع منتظمی را استخراج نمود که دارای ۲ن ضلع باشد

نقطه ه وسط قوس اب است و خط اه را وصل میکنیم و سطح کثیر الاضلاع مطلوب که سَ فرض میکنیم مرکب میشود از ۲ن مثلث متساوی که یکی از آنها احه است

و احه = حه × اط/۲ = ر × ل/۴

پس سَ = ۲ن × ر × ل/۴ = ن ر ل/۲

مثلاً بمثال میخواهیم مساحت دوازده ضلعی منتظمی را معلوم کنیم

ل = ر و ن = ۶ وبنابراین سَ = ۶ر²/۲ = ۳ر²

قضیۀ ۱۹ مسئله

در صورتیکه

در صورتیکه مفروض باشد اندازهٔ شعاع ح د = ه و از کثیر الاضلاع منتظم محاطی ارتفاع ح ا = ن میخواهیم معلوم کنیم شعاع ه' و ارتفاع ن' از کثیر الاضلاع منتظمی را که عدد اضلاعش مضاعف کثیر الاضلاع مفروض باشد و محیطش مساوی ان

فرض میکنیم ب د ضلع کثیر الاضلاع منتظم مفروض باشد و ح مرکزش و ارتفاع ح ا را امتداد میدهیم تا محیط را بر نقطه ی قطع کند و دو خط ب ی و د ی را وصل میکنیم انوقت ب ی د زاویه مرکزیه کثیر الاضلاع مطلوب میشود چونکه مقدارش نصف ب ح د است و چون عمود ح ك بر ب ی فرود آوریم و ك ه را بموازات ب د رسم کنیم طول ك ه نصف ب د میشود و بنابراین ضلع کثیر الاضلاع جدید است و ی ك شعاعش باشد و ی ا ارتفاعش را تساوی حاصل شود ی ا = ی ا/۲ = (ح ی + ح ا)/۲

یا ن' = (ه + ن)/۲ (۱)

و خلاصه در مثلث قائم الزاویه ح ك ی این تساوی حاصل شود ی ك^۲ = ح ی × ی ا

یا ه' = √(ه × ن') = √(ه × (ه + ن)/۲) (۲)

شرح این نکته هم از اصل شکل ظاهر است و هم از روی دستور که ن' بزرگتر است از ن و برخلاف ه' کوچکتر است از ه و از اینقرار در کثیر الاضلاع جدید تفاضل مابین شعاع و ارتفاع کمتر است از آنچه در کثیر الاضلاع مفروض داشتند

و چون بهمین طریقه کثیر الاضلاع دویم را بسیمی تحویل کنیم و آنرا بچهارم و بهذا عاقبت بکثیر الاضلاعی برسیم که تفاضل مابین شعاع و ارتفاعش کوچکتر باشد از هر مقدار مفروضی

برهان - در مثلث ب ح ا این تساوی حاصل شود

$ب ح - ح ا < ب ا$ یا $ه - ن < ب ا$

ولی ب ا که نصف ضلع کثیرالاضلاع باشد بقدری که عدد اضلاع بی اندازه تضعیف شود کوچکتر از هر مقدار مفروض شود و بنابراین ه - ن نیز تواند کوچکتر شود از هر مقدار که قابل اشاره حسی باشد

قضیهٔ ۲ مسئله

میخواهیم مقدار تقریبی نسبت محیط را بقطر استخراج کنیم

در اشکال سابقه مبرهن شد که $محیط\ ه = ۲\pi . ه$ و $دایره\ ه = \pi ه^{۲}$

و از آنها این دو تساوی استخراج شود $\pi = \frac{محیط\ ه}{۲ ه}$ (۱) ، $\pi = \frac{دایره\ ه}{ه^{۲}}$ (۲)

و از اینجا چهار قاعده در استخراج مقدار π استنباط شود

زیرا که در دستور (۱) میتوان محیط را معلوم فرض کنیم و شعاعش را استخراج نمود یا بالعکس شعاع را معلوم فرض کرد و محیط را استخراج نمود و در دستور (۲) نیز میتوان شعاع را معلوم فرض کرد و مساحت دایره را استخراج نمود یا مساحت را معلوم فرض کرد و شعاع استخراج نمود

و چون بنای ما بر اصول است بذکر یک قاعده اکتفا کنیم و آن قاعده اول است

که فرض میکنیم محیط ع واحد باشد و میخواهیم از آن رو طول شعاعش را معلوم کنیم شکل مربعی بر واحد طول رسم میکنیم پس محیطش چهار واحد شود

و فرض میکنیم ه و ن شعاع و ارتفاع این مربع باشد

آنوقت $ه = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ، $و ن = \frac{۱}{۲}$

حال مثال سابق این مربع را تحویل میکنیم بمثمنی که محیطش مساوی آن باشد پس این دو دستور حاصل شود ر۲ = √((۲+√۲)/۸) و ه۲ = (۱+√۲)/۴

و بعد شعاع ر۳ و ارتفاع ه۳ از کثیرالاضلاعی را استخراج کنیم که صاحب ۱۶ ضلع باشد و بهمانطور چون بهمین طریق همواره پیش رویم میرسیم بکثیرالاضلاعی که محیطش همان چهار واحد باشد و تفاضل مابین دو شعاعش رn و هn بحدی کوچک شود که بخواهیم و چون دو دایره رسم کنیم یکی بشعاع رn و دیگر بشعاع هn محیط اولی بزرگتر باشد از ۴ و محیط دومی کوچکتر از آن پس شعاع دایره که محیطش درست چهار واحد باشد واقع میشود مابین رn و هn و هر چه تقریب خواسته باشیم استخراج شود پس اگر این دو شعاع را باعشار تحویل کنیم ظاهر است ارقام مشترکه متعلق باشد بشعاع مطلوب

و مقادیر متتالیه شعاع و ارتفاع کثیرة الاضلاع ۴ ضلعی و ۸ و ۱۶ ...... تا ۸۱۹۲ ضلعی را در جدول آوردیم

عدد اضلاع	ارتفاعات	اشعه
۴	ه۱ = ٠٫٥٠٠٠٠٠٠	ر۱ = ٠٫٧٠٧١٠٦٨
۸	ه۲ = ٠٫٦٠٣٥٥٣٤	ر۲ = ٠٫٦٥٣٢٨١٥
۱۶	ه۳ = ٠٫٦٢٨٤١٧٤	ر۳ = ٠٫٦٤٠٧٢٨٩
۳۲	ه۴ = ٠٫٦٣٤٥٧٣١	ر۴ = ٠٫٦٣٧٦٤٣٥
۶۴	ه۵ = ٠٫٦٣٦١٠٨٣	ر۵ = ٠٫٦٣٦٨٧٥٤
۱۲۸	ه۶ = ٠٫٦٣٦٤٩١٩	ر۶ = ٠٫٦٣٦٦٨٣٦
۲۵۶	ه۷ = ٠٫٦٣٦٥٨٧٨	ر۷ = ٠٫٦٣٦٦٣٥٧
۵۱۲	ه۸ = ٠٫٦٣٦٦١١٧	ر۸ = ٠٫٦٣٦٦٢٣٧
۱۰۲۴	ه۹ = ٠٫٦٣٦٦١٧٧	ر۹ = ٠٫٦٣٦٦٢٠٧
۲۰۴۸	ه۱۰ = ٠٫٦٣٦٦١٩٢	ر۱۰ = ٠٫٦٣٦٦١٩٩
۴۰۹۶	ه۱۱ = ٠٫٦٣٦٦١٩٥	ر۱۱ = ٠٫٦٣٦٦١٩٧
۸۱۹۲	ه۱۲ = ٠٫٦٣٦٦١٩٦	ر۱۲ = ٠٫٦٣٦٦١٩٦

و از استقرار دایره که محیطش چهار واحد باشد شعاعش این میشود ...... ۰٫۶۳۶۶۱۹۶

پس نسبت محیط بقطر چنین باشد ......۳٫۱۴۱۵۹۲۶ = $\frac{۴۰۰۰۰۰۰۰}{۱۲۷۳۲۳۹۲}$

ارشمیدس هندس مشهور که ۲۸۷ سال شمسی قبل از مسیح در سیراکوزه متولد شده مقدار
این نسبت تقریباً تا $\frac{۲۲}{۷}$ بدست آورده و متیوس مهندس که در حدود هزار هجری حیات
داشته این مقدار را $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ بدست آورده و چون آنرا باعشار تحویل کنیم تا ۶ رقمش موافق است
و طریق ضبطش بهیئت که اعداد فرد ۱ و ۳ و ۵ هر کدام را دو مرتبه از یسار بیمین بنویسند بخصوص با
۱۱۳۳۵۵ و سه رقم اول مخرج کسر قرار دهید و سه رقم ثانی را صورت قرار دهیم
و در عصر ما تا یکصد و پنجاه و چهار رقم اعشاریش بدست آمده و اگرچه هرگز از آن هفت رقم
بیشتر استعمال نکنند ولی چون علامت ترقی و تکمیل علم است ما در اینجا آوردیم

۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳ —
— ۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰۵۸۲۰ —
— ۹۷۴۹۴۴۵۹۲۳۰۷۸۱۶۴۰۶۲۸۶۲۰۸۹۹۸ —
— ۶۲۸۰۳۴۸۲۵۳۴۲۱۱۷۰۶۷۹۸۲۱۴۸۰۸۶ —
— ۵۱۳۲۸۲۳۰۶۶۴۷۰۹۳۸۴۴۶۰۹۵۵۰۵۸۲ —
— ۳۷۱۷۲۵۳۵۹۴۰۸۱۲۸۴۸۰۲ ......

ضمیمه مقاله چهارم

تعریف - در میان جمیع مقادیر یکه از یکنوع باشند اعظم را بلغت لاتین ماکزیمم یعنی بزرگترین گویند
و اصغر را مینیموم و این دو کلمه اکنون در جمیع لغات بهمان دو معنی معروف باشند
و ما نیز در مقام ضرورت استعمال کنیم مثلاً میان جمیع اوتار که مابین هر دو نقطه
محیط دایره وصل شوند قطر ماکزیموم است و میان جمیع خطوطیکه از نقطه مفروضه
بخطی مفروض وصل شوند عمود مینیموم است

اشکال متساویة المدور آنها باشند که طول محیطشان برابر باشند

قضیهٔ اول

میان جمیع مثلثاتیکه ترکیب شوند از دو ضلع مفروض بنا بر آنکه زاویهٔ حادثه ما بین آنها تغیر پذیر باشد و اختیاری اعظم مثلثی است که از دو ضلعش زاویهٔ قائمه حادث کنند

مثلاً در دو مثلث ب ا د و ب ا د که ضلع ب ا مشترک است و ضلع ا د = ا د و زاویه ب ا د قائمه کوئیم مثلث ب ا د اعظم است از مثلث ب ا د که زاویهٔ آ در آن حاده باشد یا منفرجه بر مثلثها قاعده ا ب چون در همه مشترک است اند مثلثات نسبت دارند با ارتفاع ا د و د ه باشند ولی عمود د ه اقصر است از د ا مائل متساوی ا د و ا د پس مثلث ب ا د کوچکتر است از مثلث ب ا د و این حکم کلی است در سایر مثلثات

قضیهٔ دوم ۲

در جمیع اشکال مسطحهٔ متساویة الدور سطح دایره اعظم باشد

اولاً این فقره معلوم است که بر فرض اتحاد طول محیط اشکال بسیاری پیدا میشود که از حیثیت صورت و وسعت مختلف باشند ولی این اختلاف بی اندازه نباشد و وسعت شکل با حد معینی ترقی کند پس فرض میکنیم معلوم نباشد همه اشکال متساویة الدور یک شکل اعظم یا بیشتر موجود باشند

ثانیاً آن شکل که در محیط مفروض سطحش اعظم است محدب باشد زیرا که اگر در خط مسدود و غیر محدب ا م ب قطعهٔ مقعر ا م ب را حول دو نقطه ا و ب دوران دهیم تا بوضع ا م ب قرار گیرد شکل جدید ا م ب

محیطش برابر شکل اول است ولی سطحش اعظم از او است

ثانیاً اگر ام ب ده شکل اعظم باشد بمحیط مفروض خط اب آن محیط را نصف کرده باشد گویم سطح شکل را نیز بدو قطعهٔ متعادل قسمت نموده زیرا که اگر نگوئید قطعهٔ ادب اعظم است از ام ب آنرا حول خط اب دوران میدهیم تا قرار گیرد بر اذب آنوقت شکل اذب ده محیطش مساوی میشود با ام ب ده و مساحتش اعظم پس شکل مفروض ام ب ده اعظم نمیشود

از آنچه ذکر شد نیز معلوم میشود که اگر ام ب ده شکل اعظم باشد اذ ب ده نیز اعظم است و در شکل اخیر هر عمودی که بر اب اخراج کنیم مثل دذ با آن خط نصف میشود بر وجهی که دو مثلث ادب و اذ ب متساوی میگردند

بعد از این مقدمات اگر در زاویتان ادب و اذ ب قائمه نباشند میتوان سطح هر دو مثلث ادب و اذ ب را بمرتبه وسعت داد بی آنکه تغیری در طول اضلاع اد و دب و اذ و ذب عارض شود و نه در طول قطعات ال د و د ل ب و ال ذ و ذ ل ب یعنی همان مجموعه اب تنها تغیر کند پس باینحو سطح شکل وسعت یابد بی آنکه طول محیطش تغیر کند و این خلاف فرض است پس هر دو زاویهٔ د و ذ قائمه باشند و نقطهٔ د که اختیار نموده بودیم در هر جای محیط اذب میتوان قرار داد و پس از این انحنای شکل نصف دایره است بنابراین معلوم شد که اگر خطی شکل اعظم را نصف کند قطعه‌اش نصف دایره است پس خود شکل دایره است

قضیهٔ ششم

بیان: از جمیع اشکال مسطحهٔ متساویة الوسعه دایره محیطش اقصر است

برهان اگر شکلی یافت شود بوسعت م که محیطش اقصر از دایره باشد و مساحتش برابر آن میتوان بحکم قضیهٔ سابقه مبدل کرد آنرا بدایره که صاحب همان محیط باشد و سطحش

اعظم از

اعظم باشد از م

پس این دایره ثانی سطحش اعظم شود از دایره اول و محیطش اقصر و این محالست

قضیهٔ چهارم

هر کثیر الاضلاع مثل ا ب ج د ه را که دارای یک زاویهٔ مقعر باشد میتوان
مبدل نمودش بکثیر الاضلاع محدبی که وسعتش بیشتر باشد و محیطش
برابر و یک ضلعش کمتر

برهان چون ا ب را امتداد دهیم نقاط مختلفه‌اش را
وصل کنیم بنقطهٔ د مجموع ب ط + ط د روی تزاید
ابتدا از ب د الی غیر نهایه پس راجع بنقطه ثابت
شود مثل ط که اینجا ب ط + ط د = ب ج + ج د
و در آن نقطه کثیر الاضلاعی ترکیب شود مثل ا ب ط د ه که وسعتش ظاهراً اعظم است
از شکل مفروض و محیطش برابر وست و یک ضلع کمتر دارد

قضیهٔ پنجم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویة المحیط که عدد اضلاعشان متساوی
باشد کثیر الاضلاع منتظم اعظم است

برهان در اثبات حکم مذکور باین وجه پیش میرویم که
اگر کثیر الاضلاعی جمیع اضلاعش متساوی نباشند
و همچنین جمیع زوایایش در جملهٔ اشکال متساویة الحدود
که یک عدد ضلع باشند چنین شکل اعظم نتواند شد
اولاً فرض میکنیم کثیر الاضلاع ا ب ج د ه صاحب ع ضلع باشد و ا ب د ب ج

و بر ب ح نقطهٔ م را انقدر نزدیک به ح فرض میکنیم که با زاویهٔ ب م و بعد زاویه ام بَ را مساوی ب ا م رسم میکنیم و م بَ را مساوی ا ب جدا میکنیم و خط ا بَ را وصل میکنیم و مثلث ا بَ م مساوی میشود با مثلث ا ب م

ازاینجا معلوم میشود که میتوان کثیرالاضلاع ا ب ح د ه را مبدل نمود به کثیرالاضلاع ا بَ م ح د ه که صاحب همان وسعت و همان محیط باشد جز آنکه عدد اضلاعش ۵ + ۱ است و دارای یک زاویهٔ مقعر است زیرا که ا ب چون قصر است از ب م زاویهٔ ب م ا اصغر میشود از ب ا م یا از بَ م ا

و کثیرالاضلاع ثانی را بر قضیهٔ سابقه میتوان مبدل نمود بشکلی دیگر که صاحب ۵ ضلع باشد و همان محیط و وسعتش بیشتر باشد پس معلوم شد که در جملهٔ اشکال متساویة الحدود ۵ ضلعی شکل ا ب ح د ه مختلف الاضلاع اعظم نیست

ثانیاً در کثیرالاضلاع ۶ ضلعی ا ب ح د ه ع فرض میکنیم زاویه ا > ب و نقطهٔ م را انقدر نزدیک به ب فرض میکنیم که زاویهٔ م ا ع باز اعظم باشد از ا م ح

و زاویهٔ م ا بَ را مساوی ا م ب رسم میکنیم و ضلع ا بَ را مساوی م ح جدا میکنیم و خط م بَ را وصل میکنیم و مثلث م ا بَ مساوی میشود با مثلث ا ب م و کثیرالاضلاع ا بَ م ح د ه ع وسعت و محیطش برابر میشود با ا ب ح د ه ع ولی عدد اضلاعش ۶ + ۱ است و دارای یک زاویهٔ مقعر است زیرا که چون ا م ح + ا م ب = ۲ق پس م ا ع + م ا بَ > ۲ قائمه

و این کثیرالاضلاع را میتوان مبدل نمود بشکلی دیگر که صاحب ۶ ضلع باشد و همان محیط و وسعتش بیشتر پس ا ب ح د ه ع اعظم نیست

قضیهٔ ششم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویة الوسعه که عدد اضلاع شان یکی باشد کثیر الاضلاع منتظم محیطش اقصر است

برهان اگر کثیر الاضلاع غیر منتظمی که صاحب n ضلع باشد و بوسعت م محیطش اقصر شود از کثیر الاضلاع منتظمی که بهمان وسعت باشد و صاحب همان عدد اضلاع میتوانیم بحکم قضیه سابقه مبدل کنیم آنرا بکثیر الاضلاع منتظمی که بهمان دوره باشد و صاحب n ضلع و وسعتش م اعظم باشد از م پس این کثیر الاضلاع منتظم ثانی عدد اضلاعش برابر باشد و محیطش اقصر و وسعتش بیشتر و این محال است

قضیه هفتم

اندو کثیر الاضلاع منتظم متساویة الدوره آنکه عدد اضلاعش بیشتر باشد اعظم است

برهان فرض میکنیم ا ب ج د ه و کثیر الاضلاع منتظم شش ضلعی باشد و نقطه ط را بریکی از اضلاع نشان میکنیم و آنوقت میتوان شکل کثیر الاضلاع غیر منتظم هفت ضلعی فرض نمود که زاویه ثالثه بین ع و ضلعش ط ج و ط ه دو وقائمه باشد و چنین کثیر الاضلاع بنابر قضیه ۵ کوچکتر است از کثیر الاضلاع منتظم هفت ضلعی که بهمان دوره باشد فهو المطلوب

مسطحات

احکام مبرهن نشده

۱- شکلی که رئوس زوایایش اوساط اضلاع هر ذواربعة الاضلاع باشد متوازی الاضلاع است

۲- از نقطه مفروضه در درون مثلث متساوی الاضلاع چون سه عمود بر اضلاعش فرود آوریم مجموع آنها مقداری شود ثابت و این حکم را در نقطه خارج مثلث نیز تحقیق کنید و ببینید چه صورت پیدا میکند

۳- چون بر نقطه تماس ا از دو دایره متماس ب دو قاطع ب ا ب و ح ا ح را مرور دهیم ثابت کنید که دو خط ب ح و ب ح متوازی باشند

۴- در هر ذواربعة الاضلاع محیط بر دایره مجموع هر دو ضلع مقابل مساویست با مجموع دو ضلع دیگر (عکس این مسئله نیز صحیح است)

۵- دایره ه را مماس میکنیم بدو ضلع زاویه ا و خط ب د ح را مماس میکنیم بدایره و منتهی مینمائیم بدو ضلع زاویه پس مبرهن کنید که اولا محیط مثلث ا ب ح ثابت است در هر جا از قوس م د ن نقطه تماس فرض شود و ثانیا مقدار زاویه ب ه ح ثابت است

۶- چون مواقع سه ارتفاع مثلثی را با هم وصل کنیم مثلثی جدید ترکیب شود که خطوط منصف زوایایش ارتفاعات مثلث اول باشند

۷- مواقع سه ارتفاع مثلث و اوساط سه ضلعش بر محیط دایره واقع شوند بر هر سه

۸- در شکل ذواربعة الاضلاع چون بر سه ضلع متوالیش دایره مماس کنیم از مراکز چهار دایره مماسه که بدست می آید ذواربعة الاضلاعی ترکیب شود که قابل محاط شدن در دایره باشد

۹- دو خط منصف دو زاویه حادثه ما بین هر دو ضلع متقابل ذواربعة الاضلاع محاطی زاو

قائمه متقاطع شوند

۱۰- چون از نقطهٔ مفروضه بر دایرهٔ محیطه بر مثلثی سه عمود بر سه ضلع آن مثلث فرود آوریم مواقع آنها بر خط مستقیم واقع شوند

۱۱- بر دو ضلع اب و ب ج از مثلث اب ج دو متوازی الاضلاع مثل اب ره و ب ج د ل رسم کنیم و دو ضلع ه د و د ل را امتداد میدهیم تا نقطهٔ م و خط م ب را وصل میکنیم و با مجاورت ضلع اد متوازی الاضلاعی رسم میکنیم که ضلع مجاورش مساوی و موازی باشد با م ب پس ثابت کنید که این متوازی الاضلاع معادلست با مجموع دو شکل دیگری و از اینجا شکل عروس را اثبات نمائید

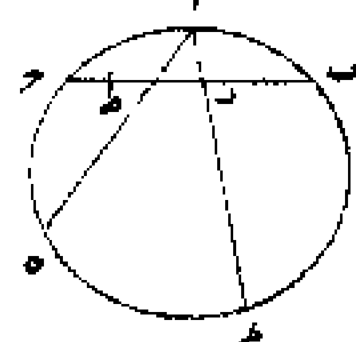
۱۲- سه ارتفاع هر مثلث بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۳- خطوط واصله مابین رئوس مثلث و اوساط اضلاع عکسش بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۴- نقطهٔ تقاطع سه ارتفاع مثلث و نقطهٔ تقاطع خطوط منصف قواعدش و مرکز دایرهٔ محیطه اش بر خط مستقیم واقع شوند و فاصله مابین دو نقطهٔ اول مضاعف فاصله مابین دو نقطهٔ آخرست

۱۵- چون از نقطهٔ مفروضه دو خط رسم کنیم که قاطع دایره شوند و عمود بر همدیگر مجموع دو مربع دو وتر مقداری شود ثابت

۱۶- چون سه دایره دو بدو متقاطع شوند سه وتر فصل مشترک آنها بر یک نقطه متقاطع شوند



۱۷- چون از نقطهٔ اوسط قوس ب ا ج دو قاطع ا ر د و ا ط ه را رسم کنیم چهار نقطهٔ د و ر و ط و ه بر محیط دایره واقع شوند

۱۸- چون سه دایره همدیگر را دو بدو مماس کنند